الدكتور
حسن كنيش
أستاذ في كلية العلوم بجامعة دمشق

الميكانيك الفيزيائي

١٤٠١ ـ ١٤٠٢ هـ
١٩٨١ ـ ١٩٨٢ م

المطبعة الجديدة ـ دمشق

الدكتور

حسن كنيش

أستاذ في كلية العلوم بجامعة دمشق

الميكانيك الفيزيائي

١٤٠١ - ١٤٠٢ هـ

١٩٨١ - ١٩٨٢ م

المطبعة الجديدة - دمشق

منهــاج

الميكانيك الفيزيائي

فرع العلوم الفيزيائية الكيميائية

السنة الثانية من كلية العلوم

ثلاث ساعات أسبوعية

١ ــ دراسة تحليلية لقوانين نيوتن

آ) مجموعة الجسيمات المادية

ب) الجسم الصلب ، تطبيق على الجيروسكوب

٢ ــ الميكانيك التحديلي

آ) مبدأ دالمبــير

ب) معادلات لاغرانج

جـ) قوانين الانحفاظ

٣ ــ تحريك الجسم الصلب

آ) النظريات العامــة

ب) معادلات أولــير

جـ) زوايا أولــير

٤ ــ التصادم والتبعثر (التشتت)

٥ ــ المعادلات القانونية

آ) معادلات هاميلتون

ب) الفعل الاصغر

جـ) التحويلات القانونية

* * *

مقدمة

لقد جاء هذا الكتاب حصيلة عمل دام خمسة عشر عاما في تدريس مادة الميكانيك الفيزيائي في جامعتي دمشق والجزائر . وعلى الرغم من الجهود الكبيرة الدائبة التي بذلتها خلال هذه الاعوام في اعداد هذه الحصيلة المتواضعة وتحسينها ، ماكنت لأرضى لها أن تكون كتابا جامعيا بشكلها الحالي لولا مساس الحاجة .

وضعت هذا الكتاب في أربعة عشر فصلا وفق منهاج مقرر الميكانيك الفيزيائي في كلتا الجامعتين ، وهو منهاج واحد . وقد تناولت فصوله الاربعة الاولى مراجعة لأسس الميكانيك . ونظرا لما كنت ألمسه من ضعف لدى الكثير من الطلاب في فهم موضوعي الجملة اللاعطاليةوحركة الجسيمات المشحونة في الحقول الكهرطيسية ، فقد فردت فصلا خاصا لكل من هذين الموضوعين نظرا لاهميتهما الكبرى في الفيزياء .

أما بقية فصول الكتاب فانها تعالج الجزء الاساسي من منهاج هذا المقرر . فيتناول الفصل السابع دراسة حركة المجموعات المادية . ويعالج الفصل الثامن أبحاث الصواريخ والانقسام والاصطدام كتطبيقات على حركة المجموعات المادية . أما الفصل التاسع فيبحث في أساسيات عزوم عطالة الاجسام ، بينما يتناول الفصلان العاشر والحادي عشر دراسة حركة الجسم الصلب .

وقد أولي الميكانيك التحليلي عناية خاصة ، حيث عولجت نظرية لاغرانج فيالفصل الثاني عشر كما عولجت نظرية هاملتون في الفصل الثالث عشر . وأما الفصل الرابع عشر والاخير فقد تعرض لمبادىء الميكانيك النسبوي في اطار نظرية النسبية الخاصة ، وأخيرا فقد تضمن هذا الكتاب مجموعة من التمارين والمسائل مبوبة حسب فصوله .

هذا وإنني ، إذ آمل أن يكون هذا الكتاب مصدر عون لطلابي الاعزاء في دراستهم وان يجد فيه زملائي الكرام ، الذين قد يستعملونه في جامعات القطر العربي السوري أو في جامعات الاقطار العربية الشقيقة ، بعض ما يخفف أعباء التدريس عنهم ، أتقدم اليهم جميعا بالرجاء الخالص ألا يعتبروه كتابا خاليا من النقص والعيوب وأن يلتمسوا لي عذرا حيثما يقعون على مواضع النقص والخطأ والزلل فيه . كما أرجو أن يزودوني بملاحظاتهم القيمة ونقدهم البنّاء .

وانني لذلك أرحب بكل نقد أو تصويب أو اقتراح يردني من قرائي الاعزاء ليردني الى حيث الصواب .

دمشق ١٩٨٢/١/١

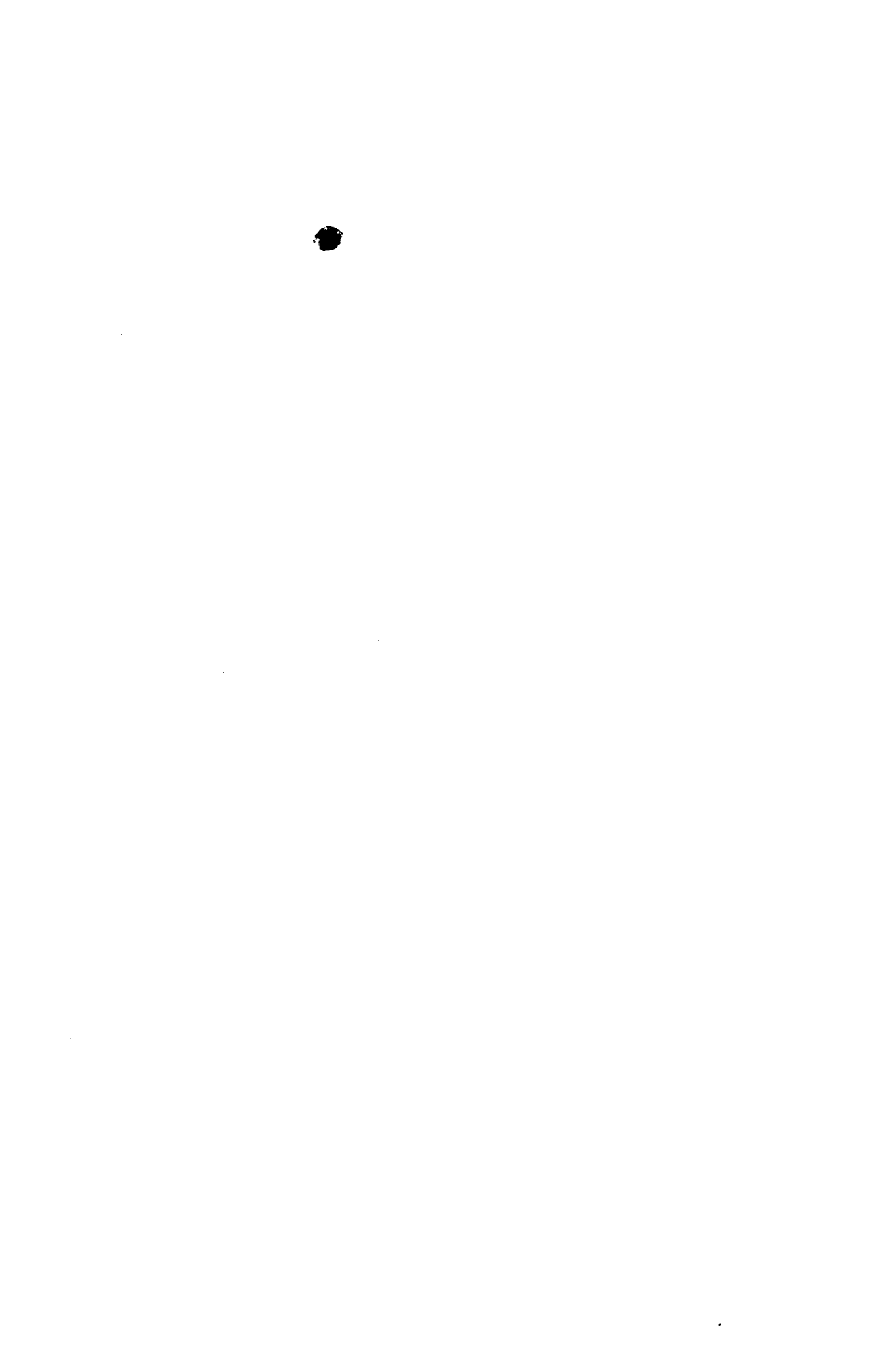
حسن كنيش

الاهـــداء

لقد كانت ملاحقتي العلمية المستمرة من قبل المتفوقين من طلابي اقوى دوافعي على العمل الجاد في تدريس مادة هذا الكتاب واكبـــر مشجعاتي على كتابة محتواه .

فالى تلك النخبة العزيزة من طلابي أهدي هذا الانتاج المتواضع .

دمشق ١٩٨٢/١/١   حسن كنيش



الفصل الأول

الميكانيك

اولياتــه ومسلماتــه

- الفيزياء وفروعها التقليديــة
- الميكانيك ، اولياته ومسلماته
- اوليات الميكانيك : الزمان والمكان والمادة
- مسلمات الميكانيك : قوانين نيوتن
- جمل المقارنة العطالية
- السرعة والتسارع
- المحاور الذاتية للحركة
- التسارعان المماسي والناظمي
- العمل والاستطاعة والطاقة الحركية
- حقول القوى المحافظة والطاقة الكامنة
- انحفاظ الطاقــة
- الاندفاع الخطي والدفع الخطي
- الاندفاع الزاوي والدفع الزاوي
- انحفاظ الاندفاع الخطي والاندفاع الزاوي
- توازن الجسيم المادي
- جمل الواحدات والابعاد



I — الفيزياء وفروعها التقليدية :

ان في دراسة الفيزياء كثيراً من الاثارة والتحدي للفكر الانساني • ولقد كانت دراسة الفيزياء والتحربات الفيزيائية العلمية ، ولا تزال ، من أكثر فعاليات العقل البشري متعة • ولذلك فقد كانت الفيزياء العلم الذي جذب اهتمام الانسان وشغله خلال العصور السحيقة من تاريخه الطويل • لقد أتت كلمة « الفيزياء » من اليونانية ومعناها « الطبيعة » • ولهذا « فالفيزياء علم يكرس لدراسة جميع مظاهر وظواهر الطبيعة » • كان هذا مفهوم الفيزياء حتى أوائل القرن التاسع عشر وكان يطلق عليها أحيانا اسم « فلسفة الطبيعة » • إلا أن الفيزياء منذ القرن التاسع عشر وحتى وقت قريب اقتصرت على معالجة مجموعة محدودة من الظواهر الطبيعية دعيت « بالظواهر الفيزيائية » واشتملت على الحوادث التي لا تتغير أثناءها طبيعة العناصر أو المركبات المادية المشتركة فيها • بعد ذلك راح الجميع يبتعدون شيئاً فشيئاً بالفيزياء عن هذا المفهوم الاشوه عائدين بهذا العلم الى مفهومه وشموله الاساسيين • ويمكننا أن نقول اليوم ان الفيزياء علم غايته دراسة عناصر الطبيعة وتفاعلاتها • ومن خلال هذه التفاعلات وبدلالة نتائجها يستطيع الفيزيائي أن يعين خواص المادة وأن يفسر الظواهر الطبيعية التي يلاحظها •

إن طموح الانسان وحبه الفطري للاطلاع والمعرفة دفعا به منذ القديم ولا يزالان يدفعان به الى إظهار فضول علمي مستمر لمعرفة « كيف تعمل الطبيعة » و « كيف يسخرها لخدمته ومصلحته » •

ولقدكانت حواسه ، بادىء الأمر ، المصـــدر الوحيد الذي يقـدم له المعلومات عن الطبيعة وعن حوادثها ، ولذلك فقد درج على تصنيف الحوادث الطبيعية « الفيزيائية » تصنيفاً أساسه الحواس • فالنور أو الضوء يتصل بحاسة الابصار ، والصوت بحاسة السمع ، والحرارة بحاسة اللمس • وهكذا ••• وأما نشوء العلوم الفيزيائية وظهورها فقد كان أمراً تابعاً لمدى سهولة ملاحظة الحوادث التي تشتمل عليها • فلقد كانت حركة الاجسام أبرز ظاهرة أو حادثة يمكن أن تلاحظ وترصد بصورة مباشرة ، ولذا كان علم الميكانيك أول فرع من فروع الفيزياء ظهر كعلم متميز في حين أن علم الكهرطيسية الذي لا يتصل مباشرة بحاسة من الحواس لم يظهر كعلم منظم حتى القرن التاسع عشر • وهكذا كانت فيزياء القرن التاسع عشر مقسمة الى خمسة فروع تطلق عليها صفة التقليدية وهي :

١ ـ الميكانيك
٢ ـ الضــوء
٣ ـ الحرارة
٤ ـ الصوت
٥ ـ الكهرطيسية

بقيت الفيزياء على هذا التصنيف وعولجت حسبه حتى أوائل القرن العشرين حين تبلور فرع جديد للفيزياء وأضيف الى الفروع الخمسة السابقة • ونظراً لحداثة عهده بالنسبة لبقية الفروع فقد دعي هذا الفرع بـ « الفيزياء الحديثة » ، وهي التي اشتملت على التطورات الفيزيائية التي تمت خلال هذا القرن •

ان الفروع التقليدية للفيزيــاء كانت ولا تزال وستبقى أسساً هامة لا غنى عنها للفيزياء • والتفريق بينها على النحو السابق واعتبارها علوماً مستقلة أمر فقد معناه وأضحت أجزاء من كــل ، ينظر اليها

بمنظار جديد صنعته تطورات فيزياء القرن العشرين المذهلة • إننا الآن لا نفرق بين تقليدي الفيزياء وحديثها ولا بين فرع وآخر من فروعها بل ننظر اليها كلها كعلم واحد يتكامل يوما بعد يوم ليشكل وحدة رائعة من المعرفة تعالج بطرق منطقية ومنسجمة • وأخيراً ، لئن ميزنا اليوم بين فروع الفيزياء في دراستنا فليس ذلك إيمانا منا بوجوب الفصل والتفريق بل سعياً وراء تبسيط العرض وسهولة التعلم •

II ـ الميكانيك واولياته ومسلماته :

الميكانيك ، بقصد التبسيط لا بقصد الفصل والتمييز ، هو ذلك الفرع من الفيزياء الذي يهتم بدراسة تغير مواضع الاجسام • ويضم ثلاثة مواضيع هي :

الحركة : وتهتم بدراسة الهندسة الحركية •

التحريك : وهو يربط بين الحركة وأسبابها •

التوازن : ويعالج شروط انعدام الحركة •

ويقوم الميكانيك ، كغيره من العلوم ، على العناصر التالية التي تشكل أسس الميكانيك الافتراضية وتبنى منها طرق معالجته ودراسة الحوادث التي يشتمل عليها :

آ ـ الاوليات :

وهي مفاهيم غير معرفة وجودها أمر حتمي لأن أي تعريف لا بد وأن يصاغ بدلالة مفهوم آخر أو مفاهيم أخرى • فمن الواضح أنه لا بد من البدء بمفاهيم نعيها ونفهمها ولها مدلولاتها بالنسبة لنا إلا أننا لا نستطيع تعريفها • فمفهوم النقطة ومفهوم الخط مثلا في هندسة إقليدس هما مفهومان أوليان غير معرفين • ويشكل الزمان والمكان والمادة أوليات علم الميكانيك •

ب — التعاريف :

وهي مفاهيم معرفة تعتمد في تعريفها على مفاهيم أخرى أولية أو معرفة • فالسرعة والتسارع والعمل والكمون مثلا مقادير أو مفاهيم نعرّفها بدلالة مفاهيم أخرى •

ح — المسلمات :

والمسلمات أفكار وأحكام أساسية قد تأخذ أشكالا رياضية توضع على شكل فرضية غير مبرهنة يؤمل من تطبيقها الوصول الى إيضاح وتفسير وتعليل بعض الظواهر بصورة صحيحة • إن وضع مثل هذه الفرضيات والتأكد أحياناً من صحتها أمر غالبا ما تقود اليه الملاحظات التجريبية أو التأملات العلمية العميقة • قوانين نيوتن هي مسلمات الميكانيك •

د — النظريات :

وهي فرضيات مبرهنة وتعتمد في برهانها على المسلمات والتعاريف • وسنرى في هذا الكتاب عدداً كبيراً جداً من النظريات في الميكانيك • لكننا نود التوقف عند أوليات ومسلمات علم الميكانيك •

III - أوليات الميكانيك ـ الزمان والمكان والمادة :

لقد كونا من خلال تجاربنا اليومية معاني لمفاهيم الزمان والمكان والمادة إلا أنه يتعذر علينا صياغة تعاريف دقيقة لهذه المفاهيم • ولذلك فنحن نعتبرها أوليات غير معرفة رغم أننا نفهمها وندرك مدلولاتها • لقد كونا معنى لمفهوم الزمان من خلال خبرتنا حول وقوع حادث قبل أو بعد حادث آخر • ومفهوم المكان مرتبط بمفاهيم النقطة والموضع والاتجاه والانتقال • ونحن نفهم المقصود منه دون مقدرة على تفسير فهمنا هذا • وأما مفهوم المادة فمرتبط بفكرة تشكل الاجسام من قطع

أو أجزاء صغيرة ، فهـو إذن مرتبط بمفهوم الجسيم المادي كنقطة تشغلها المادة ، ومقدار المادة الملازمة للجسيم هي كتلة ذلك الجسيم •
ولعل مفاهيم الزمان والمكان والمادة من أهم الأوليات لا في الميكانيك وحسب بل بالسبة اعلم الفيزياء كلـه •

IV — مسلمات الميكانيك ـ قوانين نيوتن :

يعد السير إسحق نيوتن مؤسس علم الميكانيك الذي يسـمى باسمه « الميكانيك النيوتني » وذلك لانه وضع المسلمات الاساسية التي ارتكز عليها هذا العلم • وتتلخص هـذه المسلمات بقوانينه الثلاثة التي وضعها في نهاية القرن السابع عشر •

آ ــ قانون نيوتن الاول :

ينص هذا القانون على أن الجسم المتحرك لا يغير حالته الحركية ما لم يخضع لقوة خارجية • فاذا لم يخضع لمثل هذه القوة أو اذا زال عنه تأثيرها وكان ساكناً فانه يبقى ساكناً واذا كان متحركاً حافظ على حركـة منتظمة • ويسمى هـذا القانون « مبـدأ العطالة » •
والجدير بالذكر أن هذا القانون مثالي اذ أن من المستحيل عزل أي جسيم عن تأثير أية قوة خارجية ما لم يكن هذا الجسيم وحده في الفراغ وهـو أمر مستحيل • وتطبيق هـذا القانون أمر تقريبي ولا ريب •

ب ــ قانون نيوتن الثاني :

فحوى هذا القانون أنـه اذا كان الجسيم متحركاً بسـرعة $\vec{v}$ وبالتالي متمتعا باندفاعخطي قدره $\vec{p} = m\vec{v}$ فانه يكون خاضعالقوة مساوية الى المشتق الزمني لهذا الاندفاع الخطي أي :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (1)$$

واذا كانت الكتلة m ثابتة أثناء الحركة أخذ هذا القانون الشكل الذي نألفه كثيراً وهو :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \qquad (2)$$

حيث $\vec{a}$ هو تسارع الجسيم • ومعنى هذا أن القوة المؤثرة على الجسيم تساوي جداء كتلته بالتسارع الذي تنتجه هذه القوة • ويعرف هذا القانون عادة « بمبدأ التحريك » •

ج ـ قانون نيوتن الثالث :

ينص هذا القانون على أنه إذا أثر الجسيم P_1 على جسيم آخر P_2 بقوة $\vec{F}_{1,2}$ فان الجسيم الثاني P_2 يؤثر على الاول P_1 بقوة $\vec{F}_{2,1}$ تساوي $\vec{F}_{1,2}$ بالشدة وتعاكسها بالاتجاه • أي أن :

$$\vec{F}_{2,1} = - \vec{F}_{1,2} \qquad (3)$$

ويسمى هذا القانون « مبدأ رد الفعل » ويعني أن لكل فعل رد فعل يعاكسه مباشرة •

V — جمل المقارنة العطالية :

ان قوانين نيوتن الثلاثة التي أتينا على ذكرها لا تصح إلا في جملة مقارنة ثابتة في الفراغ المطلق أو في جملة تتحرك فيه حركة مستقيمة منتظمة • تدعى هذه الجملة « جملة عطالية » أو « جملة غاليلية » نسبة الى غاليليه • جميع الجمل الاخرى التي لا تحقق هذه الصفة تدعى « جملا لاعطالية » ولا يصح تطبيق قوانين نيوتن فيها • إن جملة المقارنة المتماسكة مع الارض هي خير مثال على الجملة اللاعطالية وذلك لانها تتحرك حركة دورانية حول نفسها وحول الشمس ولذلك فان حركتها غير منتظمة (متغيرة السرعة) •

أما الجملة الثابتة في الفراغ المطلق فانها تبقى فكرة في الذهن دون أن تتحقق من وجودها . ذلك لأن جميع التجارب التي نجريها في المخبر لا تميز بين الجملة العطالية والجملة الثابتة ثباتاً مطلقاً ، فلا تستطيع إذن أن تكشف عن الجملة الثابتة . وأما جملة كوبرنيك التي مركزها منطبق على مركز كتلة المجموعة الشمسية ومحاورها تتجه نحو نجوم "ثابتة" فان اعتبارها جملة ثابتة أمر عار عن الصحة ، إذ ليس هناك نجوم ثابتة في الفراغ ثباتاً مطلقاً فالسكون المطلق لا يمكن أن يتحقق ، كما أن مركز كتلة المجموعة الشمسية أو أية مجموعة شمسية أو فلكية أخرى لا يمكن أن يكون ثابتاً (ساكناً) في الفراغ . ولو وجد نجم ساكن في الفراغ لكان هذا النجم حسب قانون نيوتن معزولا تماماً عن تأثير النجوم الاخرى والكواكب والاجرام السماوية وغيرها . وهذا أمر مستحيل لوجود قوى تجاذب بين العناصر المادية المؤلفة للكون .

فوق ذلك كله فان ما يتراءى لنا من امكانية الحصول على جملة مقارنة عطالية أمر لا يتعدى الوهم ، لان قوى التجاذب بين عناصر الكون تحول دون تحقق الحركة المستقيمة المنتظمة لتلك الجملة . وبالتالي لا نجد جملة مادية عطالية في هذا الكون الشاسع . وتبقى فكرة الجملة العطالية فكرة مثالية والجملة العطالية جملة وهمية تصورية . والذي نستعمله كجمل عطالية هو تحقيق تقريبي للفكرة المثالية . فهناك جمل عطالية بصورة تقريبية . ولا نستطيع استعمال هذا التقريب إلا عندما يكون تأثير اللاعطالية على الحوادث الميكانيكية المدروسة ضعيفاً . وسنفرد فيما بعد بحثاً خاصاً للحركة في جمل لا عطالية .

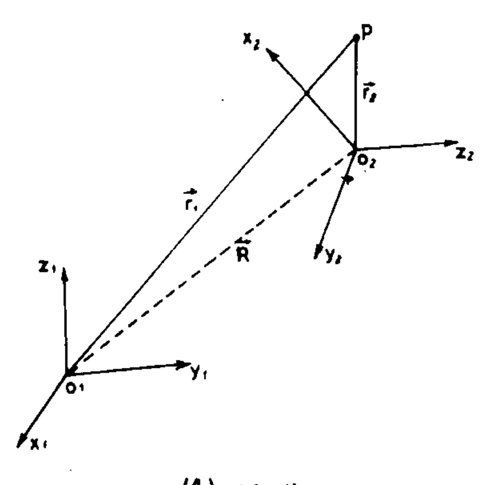
لنعد الآن الى قانون نيوتن الثاني . ان صحة هذا القانون في جملة عطالية ما يدل على أن القوة المؤثرة على الجسيم المتحرك اذا

قيست في جملتين عطاليتين يكون لها قياس واحد ، أي أن القوة واحدة في جميع الجمل العطالية ، ولذلك نسميها بالقوى العطالية . وهذا يكافىء أن للجسيم تسارعا واحدا في أية جملة عطالية . ولبيان ذلك يمكن أن نبين أنه إذا كان $\vec{a}_1$ و $\vec{a}_2$ تسارعي الجسيم بالنسبة للجملتين العطاليتين $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ و $O_2 X_2 Y_2 Z_2$ بالترتيب فان $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$. بما أن الجملتين عطاليتان فان حركة إحداهما منتظمة بالنسبة للاخرى . ويتعين لذلك موضع الثانية بالنسبة للاولى بشعاع موضع O_2 بالنسبة لـ O_1 . ويتعين موضعا الجسيم المتحرك بالنسبة للجملتين بشعاعي موضع الجسيم بالنسبة لـ O_1 و O_2 . وهذه الاشعة هي بالترتيب :

$$\vec{R} = \vec{O_1 O_2}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{O_1 P}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{O_2 P}$$



الشكل (١)

ولحساب التسارع $\vec{a_1}$ في الجملة الأولى نأخذ المشتق الثاني لشعاع الموضع في تلك الجملة بالنسبة للزمن . انظر الشكل (1) .

$$\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2P}$$

$$\vec{r_1} = \vec{R} + \vec{r_2}$$

$$\frac{d^2 \vec{r_1}}{d t^2} = \frac{d^2 \vec{R}}{d t^2} + \frac{d^2 \vec{r_2}}{d t^2}$$

$$\vec{a_1} = \vec{a_2} \qquad (4)$$

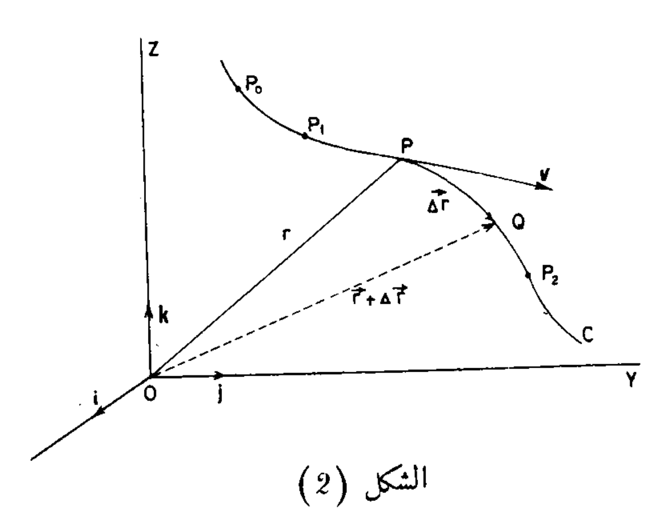
حيث $\frac{d^2 \vec{R}}{d t^2} = o$ ومشتقا $\vec{r_1}$ و $\vec{r_2}$ هما التسارعان $\vec{a_1}$ و $\vec{a_2}$. إذن فللمتحرك تسارع واحد في أية جملة عطالية . وهذا يؤدي الى ان القوة المؤثرة عليه واحـدة في أية جملة عطالية أيضاً . فاذا قاس مجموعـة من المراقبين (كل منهم في جملة عطالية مختلفة) تسارع جسيم متحرك والقوة المؤثرة عليه فانهم جميعاً يحصلون على النتيجة نفسها . وهـذا ما يعرف أحياناً بالمبدأ التقليدي للميكانيك النسبي .

قبل الشروع بدراسات تفصيلية في الميكانيك لا بـد لنا من مراجعـة سريعة لبعض النقاط الأساسية التي تشكل الادوات الاولية لهذه الدراسات من جهة والتي تمهد لهذه الدراسات التفصيلية من جهة أخرى . وتتعلق هذه النقاط بالمقادير الحركية والتحريكية المرتبطة بحركة وتحريك الاجسام المادية الصغيرة التي نطلق عليها اسم « الجسيمات المادية » أو « النقاط المادية » . وسوف نعمم ذلك في حينه على مجموعات أو أجسام مادية مؤلفة من جسيمات أو من اجسام متماسكة أو غير متماسكة .

VI ـــ السرعة والتسارع :

ليكن الجسيم المادي المتحرك على منحن C كما في الشكل (2)

ولتكن P و Q وضعي الجسيم في اللحظتين الزمنيتين t و $t + \Delta t$ بالترتيب .



الشكل (2)

وليكن أيضاً :

$$\vec{OP} = \vec{r}(t) = \vec{r}$$

$$\vec{OQ} = \vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r} + \Delta \vec{r}$$

شعاعي موضع الجسيم المتحرك في وضعيه P و Q . نعرف السرعة الشعاعية الوسطية للجسيم بين الوضعين P و Q بالمقدار :

$$\vec{v}_a = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (5)$$

والسرعة الشعاعية الآنية في الموضع P بالمقدار :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (6)$$

ويجدر بنا ان نلاحظ انه عندما تنتهي Δt الى الصفر فان $\Delta \vec{r}$ تنتهي إلى الصفر ايضاً وبالتالي تنطبق Q على P . وتكون السرعة الآنية شعاعاً مماساً للمسار C في النقطة P . فالسرعة الشعاعية الآنية المعطاة بالعلاقة (6) هي إذن سرعة الجسيم المتحرك في لحظة مروره بالموضع P . وتعطى هذه السرعة تحليليا بالعلاقة :

$$\vec{v} = \frac{d\,x}{d\,t}\,\vec{i} + \frac{d\,y}{d\,t}\,\vec{j} + \frac{d\,z}{d\,t}\,\vec{k} \qquad (7)$$

حيث x , y , z هي احداثيات P التابعة للزمن بصورة عامة وحيث $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ هي جملة أشعة الواحدة على الثلاثية المتعامدة o x y z .

وأخيراً تعرف السرعة الخطية بأنها طويلة السرعة الشعاعية . فهناك اذن سرعتان خطيتان ، وسطية وآنية ، وتعطيان بالترتيب بالعلاقتين :

$$v_a = |\vec{v}_a| = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (8)$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,y}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,z}{d\,t}\right)^2} = \frac{d\,s}{d\,t} \qquad (9)$$

حيث s هي طول القوس على المسار مقاساً من نقطة ثابتة مثل P_0 حتى النقطة P .

يتبين لنا مما سبق ان السرعة معطاة بنسبة تغير الموضع الى تغير الزمن . والسرعة بصورة عامة ليست ثابتة بل متغيرة مع الزمن ، ولمعرفة نوعية هذا التغير نحسب نسبة تغير السرعة بدلالة الزمن ونسمي هذه النسبة بالتسارع . وتعطى بالعلاقة :

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{d\,t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \qquad (10)$$

وهي مكافئة للعلاقة :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt}\vec{k} \qquad (11)$$

ولقد رأينا ان السرعة محمولة على مماس المسار في حين ان ذلك لا ينطبق على التسارع في الحالة العامة ، وسنرى ذلك بالتفصيل بعد قليل .

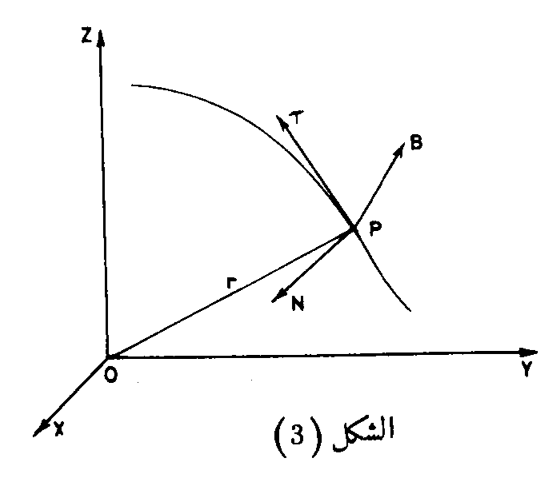
VII — الثلاثية المتحركة (المحاور الذاتية للحركة) :

يمكننا ان نكتب السرعة الشعاعية الآنية على الشكل التالي :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\frac{d\vec{r}}{ds} \qquad (12)$$

ولما كانت السرعة محمولة على المماس وكانت قيمتها المددية v فانه ينتج من العلاقة (12) ان

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} \qquad (13)$$



الشكل (3)

هو شعاع محمول على المماس وطوله الواحدة ويسمى لذلك بـ « شعاع واحدة المماس » .

ان طويلة الشعاع $\frac{d\vec{T}}{ds}$ تسمى بتقوس المنحني C . وهذا الشعاع متعامد مع شعاع واحدة المماس $\vec{T}$. وبالتالي يمكن ان نكتب :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k\vec{N} \quad (14)$$

حيث نسمي $\vec{N}$ « شعاع واحدة الناظم » ونسمي k « تقوس المنحني » C ومقلوبه $R = 1/k$ « نصف قطر تقوس هذا المنحني » ، وذلك كله في الموضع P .

ولما كان $\vec{T}$ و $\vec{N}$ متعامدين فان جداءهما :

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} \quad (15)$$

يمثل شعاع واحدة متعامد مع كل من $\vec{T}$ و $\vec{N}$ ونسميه « شعاع واحدة ثنائي الناظم » . انظر الشكل (3) .

تشكل الأشعة $\vec{T}$ و $\vec{N}$ و $\vec{B}$ ثلاثية طردية قائمة تتحرك مع النقطة P على المنحني C ، وتسمى لذلك « بالثلاثية المتحركة » ، كما يمكن تسميتها « بالمحاور الذاتية لحركة النقطة P على المنحني C » . واخيراً فان اسقاط معادلة الحركة (وهي قانون نيوتن الثاني) على الثلاثية المتحركة يعطينا ما يسمى « بالمعادلات الذاتية الحركة » .

VIII — التسارعان المماسي والناظمي :

يمكن ان نبين بسهولة ان للتسارع الشعاعي مركبتين احداهما محمولة على

المماس وتسمى « بالتسارع المماسي » وهي معطاة بالعلاقة :

$$a_t = \frac{d\,v}{d\,t} \qquad (16)$$

والأخرى محمولة على الناظم وتسمى « بالتسارع الناظمي » وهي معطاة بالعلاقة

$$a_n = v^2 k = v^2\ R \qquad (17)$$

ويمكن ان نبرهن على صحة ما تقدم انطلاقاً من العلاقة $\vec{v} = v\,\vec{T}$ واشتقاقها بالنسبة للزمن .

IX — العمل والاستطاعة والطاقة الحركية :

اذا انتقل جسيم مادي انتقالاً عنصرياً $d\,\vec{r}$ بتأثير قوة $\vec{F}$ فان هذه القوة التي تؤثر عليه اثناء الحركة تكون قد قامت بعمل عنصري قدره

$$d\,W = \vec{F}\,.\,d\,\vec{r} \qquad (18)$$

والعمل الكلي الذي تقوم به القوة عندما تحرك الجسيم من موضع ما P_1 إلى موضع آخر P_2 هو :

$$W = \int_c \vec{F}\,.\,d\,\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\,.\,d\,\vec{r} \qquad (19)$$

ان نسبة تغير العمل إلى تغير الزمن يسمى بالاستطاعة أي :

$$p = \frac{d\,W}{d\,t} = \frac{\vec{F}\,.\,d\,\vec{r}}{d\,t} = \vec{F}\,.\,\vec{v} \qquad (20)$$

ان العمل الذي تبذله القوة $\vec{F}$ عندما تحرك الجسيم من P_1 إلى P_2 هو

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \qquad (21)$$

حيث $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ السرعتان المقابلتان لشعاعي الموضع $\vec{r_1}$ و $\vec{r_2}$ في الموضعين P_1 و P_2 وذلك على الترتيب . فاذا سمينا

$$T = \frac{1}{2} mv^2 \qquad (22)$$

بالطاقة الحركية أمكننا ان نكتب العلاقة (21) من جديد على الشكل :

$$W = T_2 - T_1 \qquad (23)$$

أي ان العمل الذي تقوم به القوة ، عندما تنقل الجسم من موضع أول إلى موضع ثان ، يساوي الفرق بين الطاقة الحركية للجسم في الموضع الثاني وطاقته الحركية في الموضع الأول .

X — حقول القوى المحافظة والطاقة الكامنة :

يقال عن الفراغ او جزء منه انه يشكل حقل قوى فيا إذا وافقت كل نقطة P منه قوة معلومة $\vec{F}(P)$. ويقال عن حقل القوة (او القوة نفسها) انه مشتق من كمون اذا وجد تابع مثل $U = U(P)$ ، نسميه تابع الكمون ، يحقق العلاقة :

$$\vec{F}(P) = -\vec{\nabla} U = -\overrightarrow{\text{Grad}}\, U \qquad (24)$$

نظريــة (1) : إذا تحرك جسم على منحن C من موضع P_1 إلى آخر P_2 تحت تأثير قوة مشتقة من كمون كان العمل المنجز مستقلاً عن الطريق المتبــع بين P_1 و P_2 . ويقال في هذه الحال ان حقل القوى $\vec{F}$ محافظ ، أو ان القوة $\vec{F}$ محافظة .

ولبرهان ذلك نحسب العمل كما يلي :

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} . d\vec{r}$$

$$= -\int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)\left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\right)$$

$$= -\int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right)$$

$$= -\int_{P_1}^{P_2} dU = U(P_1) - U(P_2) \qquad (25)$$

وتـدل هـذه النتيجة على ان العمل W لا يتعلق إلا بقيمتي التابع U في الموضعين P_1 و P_2 ولا يتعلق بصورة خاصة بالطريق المسلوك من قبل الجسيم .

نظريـة (2) : إذا كان حقل القوى $\vec{F}$ مشتقاً من كمون $U(x,y,z)$ كان دوار $\vec{F}$ معدوماً . أي

$$\text{Curl}\ \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0 \qquad (26)$$

لبيان ذلك نكتب دوار $\vec{F}$ كما يلي

$$\text{Curl}\ \vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \wedge \left(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\right)$$

$$= \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \wedge \left(-\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x}\right)\vec{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right)\vec{k}$$

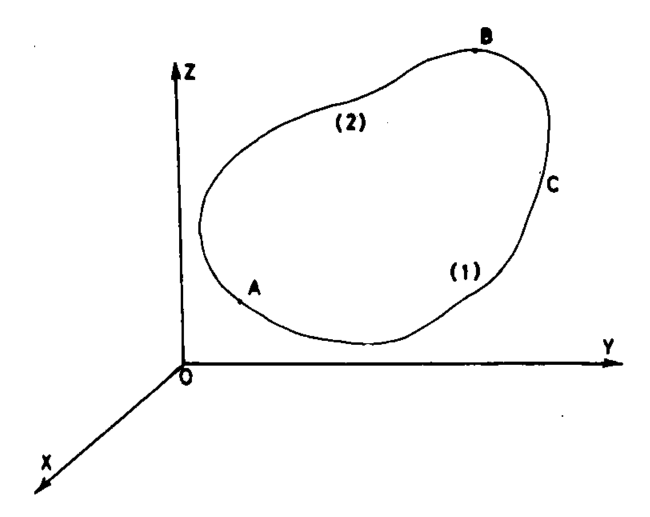
ولما كان ترتيب الاشتقاق لا يغير المشتق فان كلاً من الأقواس الموجودة في العلاقة الاخيرة معدوم ، وبالتالي تنتج العلاقة (26) .

نظريـة (3) : إذا كان الحقل $\vec{F}$ مشتقاً من كمون $U(x, y, z)$ كان العمل الذي تنجزه القوة $\vec{F}$ خـلال حركة الجسيم الخاضع لها على منحن مغلق C كالمبين في الشـكل (4) معدوماً . أي

$$W = \int_c \vec{F} . d\vec{r} = o \quad (27)$$

يمكننا ، حسب الشـكل (4) ، أن نـكتب التكامل الوارد في المعادلة (27) كما يلي

$$W = \int_{AB} \vec{F} . d\vec{r} + \int_{BA} \vec{F} . d\vec{r} \quad (28)$$



الشـكل (4)

حيث يجرى التـكامل الاول من A إلى B على الفرع (1) وينجز التكامل الثاني من B الى A على الفرع (2) . ولقد رأينا في المعادلة (25) ان كلاً

من مثل هذين التكاملين لا يتعلق إلا بقيمتي تابـع الـكمون في بداية ونهاية المنحني الذي يجري عليه التكامل . واستناداً إلى ذلك فان

$$\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(A) - U(B) \quad و \quad \int_{BA} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) \qquad (29)$$

والتعويض المباشر من المعادلتين (29) في المعادلة (28) يبين ان العلاقـة (27) صحيحة .

يسمى التابـع $U(P)$ بتابـع الـكمون في الموضع P . أما ما ندعوه بالطاقة الـكامنة في P فيعرف بأنه مقدار العمل الذي تقوم بـه القوة $\vec{F}$ عندما ينتقل الجسيم الخاضع لها (أي نقطة تأثيرها) من الموضع P إلى موضع آخر P_0 نعتبره مبدأ للمقارنة أو ، كما نقول ، مبدأ للـكمون . وتعطى هذه الطاقة اذن بالعلاقة

$$V(P) = \int_{P}^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(P_0) - U(P) \qquad (30)$$

XI — انحفاظ الطاقة :

لنفرض ان الجسيم ينتقل من موضع اول P_1 الى موضع ثان P_2 خاضعاً لحقل قوى مركزي $\vec{F}$ كما يبين الشـكل (2) . ولنحسب العمل الذي تنجزه القوة $\vec{F}$ خلال هذا الانتقال بدلالة الـكمون .

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(P_1) - U(P_2) \qquad (31)$$

$$= U(P_1) - U(P_0) - U(P_2) + U(P_0)$$

$$= V(P_1) - V(P_2) = V_1 - V_2 \qquad (32)$$

أي ان هذا العمل يساوي تناقص الطاقة الـكامنة لدى هذا الانتقال .

ولقد رأينا سابقاً أن هذا العمل يعطى بتزايد الطاقة الحركية الناجـم عن هذا الانتقـال ، كما تشير العلاقة (23) . ونستنتج من العلاقتين (23) و (32) أن

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

أو ان

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \qquad (33)$$

وهذا يشير الى أن مجموع الطاقتين الحركية والـكامنة

$$E = T + V \qquad (34)$$

وهو ما ندعوه بالطاقة الكلية ، يبقى محافظاً على قيمته لدى الانتقال من موضع الى آخر . ونعبر عن ذلك بقولنا « ان الطاقة الكلية للجسيم الخاضع لحقل مشتق من كمون هي طاقة محافظة او مصونة » .

XII ـــ الاندفاع الخطي والدفع الخطي :

اذا كان الجسيم ذو الـكتلة m متحركاً بسرعة $\vec{v}$ تحت تأثير قوة $\vec{F}$ فاننا نسمي جداء كتلته بسرعته بالاندفاع الخطي $\vec{p}$ أي

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (35)$$

واذا كانت P_1 و $\vec{v}_1$ موضع الجسيم وسرعته في لحظة ما t_1 وكانت P_2 و $\vec{v}_2$ موضعه وسرعته في لحظة أخرى t_2 فاننا نعرف الدفع الخطي للقوة المؤثرة عليه بين هاتين اللحظتين بالتكامل التالي

$$\vec{\mathcal{J}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt \qquad (36)$$

ونرى بسهولة تامة أن

$$\vec{\mathcal{I}} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\, d\vec{v}$$

$$= m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \qquad (37)$$

أى ان دفع القوة $\vec{F}$ بين t_1 و t_2 يساوي تزايد الاندفاع الخطي بينهما للجسم الخاضع لهذه القوة . انظر الشكل (5) .

XIII — الاندفاع الزاوي والدفع الزاوي :

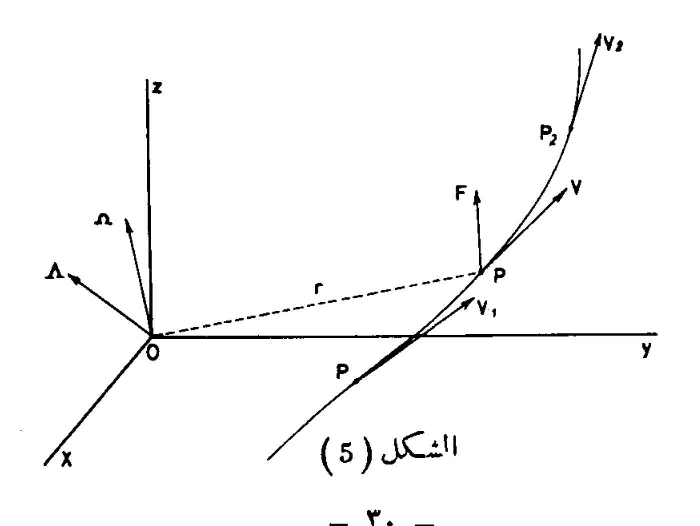
ان عزم القوة $\vec{F}$ حول نقطة ما ولتكن مبدأ الاحداثيات هو الجداء الشعاعي لهذه القوة بشعاع الموضع . أي

$$\vec{\Lambda} = \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad (38)$$

أما ما نسميه الاندفاع الزاوي فهو عزم الاندفاع الخطي أي

$$\vec{\Omega} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m\, \vec{r} \wedge \vec{v} \qquad (39)$$

ويمكن أن نتبين بسهولة وبالاشتقاق المباشر للاندفاع الزاوي $\vec{\Omega}$ بالنسبة للزمن



الشكل (5)

ان هذا المشتق يساوي عزم القوة المؤثرة . أي

$$\vec{\Lambda} = \frac{d\,\vec{\Omega}}{dt} \qquad (40)$$

وهذا ما يعرف بمبدأ الاندفاع الزاوي . ويتمتع هذا المبدأ بأهمية خاصة في التحريك . وهو يقوم مقام قانون نيوتن الثاني في كثير من التطبيقات ، وبصورة خاصة عندما نعممه فيما بعد على تحريك المجموعات المادية .

نعرف مقداراً آخر وهو الدفع الزاوي بين اللحظتين t_1 و t_2 بأنه

$$\vec{\mathcal{G}}_a = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\Lambda}\, dt \qquad (41)$$

وإذا استعملنا العلاقة (40) في العلاقة (41) وانجزنا الحساب وجدنا أن

$$\vec{\mathcal{G}}_a = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\,\vec{\Omega}}{dt}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} d\,\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1 \qquad (42)$$

ويدل ذلك على أن الدفع الزاوي بين اللحظتين t_1 و t_2 يساوي تزايد الاندفاع الزاوي بينهما .

XIV — انحفاظ الاندفاع الخطي والاندفاع الزاوي :

في الحالة الخاصة عندما تكون القوة $\vec{F}$ المؤثرة على الجسيم معدومة خلال حركته فان قانون نيوتن الثاني يبين أن

$$\frac{d\,\vec{p}}{dt} = \vec{F} = 0$$

أي ان

$$\vec{p} = m\,\vec{v} = \text{const} \qquad (43)$$

ونقول في هذه الحالة ان الاندفاع الخطي محافظ . كما ان الدفع يكون معدوماً في هذه الحالة . ويبدو ذلك واضحاً بالعودة إلى إحدى الملاقتين (36) و (37) ، حيث $\vec{P_1} = \vec{P_2}$.

أما في الحالة الخاصة التي توافق انعدام العزم $\vec{\Lambda}$ ، إما لانعدام القوة $\vec{F}$ أو لكونها محمولة على شعاع الموضع ، فان الملاقة (40) تبين أن

$$\vec{\Omega} = \vec{r} \wedge m \vec{v} = const \quad (44)$$

ونقول عندئذ ان الاندفاع الزاوي محافظ . ثم ان العودة إلى احدى الملاقتين (41) و (42) تبين ان الدفع الزاوي معدوم ، حيث $\vec{\Omega_2} = \vec{\Omega_1}$.

XV — توازن الجسيم المادي :

إن السكون أو التوازن حالة خاصة وهامة من حالات حركة الأجسام . ولكي يتوازن جسيم ما يجب الا يكون خاضعاً لأي سبب يغير موضعه . وبما أن القوة هي السبب في تحريك الأجسام فاننا نرى أن انعدام القوة لا بد منه لتوازن الجسيم . ولكننا نلاحظ أن انعدام القوة ليس كافياً للتوازن (للسكون) لأن الجسم المتحرك دون أن يخضع لقوة يتابع حركته حسب مبدأ العطالة . ولهذا فان شرط توازنه يتضمن انعدام سرعته في موضع التوازن . لذلك كله نقول إنه لكي يتوازن (يسكن) الجسيم في موضع ما يجب أن تكون القوة المؤثرة عليه في ذلك الموضع معدومة وأن تكون سرعته في ذاك الموضع معدومة أيضاً . أي :

$$\vec{F} = 0 \quad و \quad \vec{v} = 0 \quad (45)$$

عندما تكون القوة مشتقة من كمون U فان الشق الأول (المتعلق بالقوة) من شرط التوازن يأخذ شكلاً جديداً هو انعدام مشتقات الكمون

من المرتبة الأولى في موضع التوازن . أي

$$\vec{\nabla} U = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \qquad (46)$$

نقول عن التوازن انه مستقر فيما إذا أزحنا الجسيم عن موضع توازنه إزاحة صغيرة جداً وعاد إلى مكان توازنه . ففي الموضع الجديد الذي نزيح الجسم اليه تصبح القوة غير معدومة وتحرك الجسيم إلى موضعه السابق . وهذا يدل على أن لهذه القوة في المكان الجديد كمون يفعل في الجسيم فيرجعه إلى مكانه . وما تقدم من القول يعني أن قيم الكمون في المواضع أو النقاط المجاورة لموضع التوازن أكبر من قيمته في موضع التوازن ، أي أن الكمون يكون أصغرياً في موضع التوازن المستقر . ونعبر عن ذلك بانعدام مشتقات الكمون من المرتبة الأولى وبكون المشتقات الثانية موجبة . إذن يحصل التوازن إذا تحقق الشرط (46) ويكون مستقراً إذا كان

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} > 0 \qquad (47)$$

وفيما عدا ذلك يكون التوازن قلقاً ، أي غير مستقر .

وهناك حالات يكون فيها التوازن مستقراً بالنسبة لاحدى الاحداثيات وقلقاً بالنسبة لاحداثي آخر . فاذا كان مثلاً

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} < 0$$

فان التوازن مستقر بالنسبة للاحداثي y وقلق بالنسبة للاحداثيين x و z .

XVI – جمل الواحدات والابعاد :

لقد تعرضنا سابقاً الى الطول والكتلة والزمن كمقادير رئيسية واساسية في الميكانيك . يقاس كل واحد من هذه المقادير بواحدة ما . إلا أن تعيين هذه الواحدة أمر اختياري بحت . فيمكننا مثلا ان نقيس طول الطاولة ونقول انه مساو الى ستة اشبار او خمسة اقدام او مائة وخمسين سانتيمتراً

وهكذا ... اي اننا استعملنا واحدات مختلفة للقياس هي الشبر والقدم والسانتيمتر . وحتى يكون القياس ثابتاً من مكان لآخر ومن شخص لآخر لا بد من اختيار واحدات ثابتة للقياس تبقى هي نفسها في كل مكان وزمان ولدى كل انسان . وتبرز هنا لذلك فكرة اختيار مقاييس وواحدات عيارية . فاختيارنا في القياس السابق السانتيمتر وحدة للقياس يبدو حقاً اختياراً موفقاً ، في حين ان اختيار الشبر او القدم (القدم البشري) يفشل في تحقيق هدفنا لاختلاف الشبر والقدم من شخص لآخر .

في الميكانيك ، وفي الفيزياء بصورة عامة ، مقادير كثيرة كلها تحتاج الى قياس وبالتالي الى اختيار واحدات معينة ثابتة لهذا القياس . ويبدو لأول وهلة ان علينا أن نختار واحدة لكل مقدار فيزيائي بغض النظر عما اخترناه من واحدات للمقادير الأخرى . ولكن هذا غير صحيح لأن المقادير الفيزيائية مرتبطة ببعضها بواسطة علاقات رياضية معينة ، وذلك مايجعل بعض المقادير تشتق (تحسب) من مقادير اخرى ، وبالتالي فان بعض الواحدات تشتق من واحدات اخرى . وحقيقة الأمر ان هناك عدداً معيناً من المقادير الفيزيائية المستقلة بعضها عن بعض حيث لايؤثر اختيار واحدة لأحدها على اختيار واحدات المقادير الأخرى . فالطول والكتلة والزمن في الميكانيك مقادير لا تمت الى بعضها بأية صلة واختلاف احدها لايؤدي الى تغير الآخر . وبعبارة اخرى ليس هناك من علاقة او قانون يربط الكتلة بالطول او الزمن . لذلك كله يمكننا أن نعتبر هذه المقادير مستقلة عن بعضها ونسميها « مقادير اساسية » . وانتقاء واحدة قياس لكل منها يتم باستقلال تام عن اختيار واحدتي المقدارين الآخرين . ونسمي واحدات هذه المقادير الأساسية « بالواحدات الأساسية » . أما بقية المقادير الميكانيكية والتي ترتبط بالمقادير الأساسية بواسطة علاقات رياضية ذات معان فيزيائية معينة فيمكن حسابها او اشتقاقها من المقادير الأساسية عن طريق هذه العلاقات . ولذا نسميها

« بالمقادير المشتقة » . أما واحداتها ، فبالرغم من اعطائها اسماء معينة ، فانها ترتبط ارتباطاً وثيقاً بالواحدات الأساسية وتعطى بدلالتها . ونطلق عليها لذلك اسم « الواحدات المشتقة » . فالحجم مثلاً يمكن أن يقاس بواحدة معينة هي اللتر . وهي واحدة تشتق من واحدة الطول الأساسية أي السانتيمتر وتساوي الف سانتيمتر مكعب . فهي واحدة مشتقة من واحدة اساسية بالرغم من منحها اسماً خاصاً لا يشير الى هذا الاشتقاق . والحجم نفسه ليس مقداراً اساسياً لأنه مشتق من مقدار اساسي هو الطول . إذ ان الحجم ينتج من جداء ثلاثة أطوال .

اذن ، لا بد من انتقاء مقادير معينة من بين المقادير العديدة لاعتبارها مقادير اساسية وانتقاء واحدات لها . وعندئذ تعطي بقية المقادير وواحداتها بدلالة المقادير الأساسية وواحداتها . وليس من الضروري أن ننتقي بعض المقادير المعينة دون غيرها . فبدلاً من الطول والكتلة والزمن كان بامكاننا أن نختار مثلاً الحجم والقوة والسرعة الزاوية كمقادير اساسية ونعين لها واحدات تعييناً اختيارياً محضاً . الا ان اختيار المقادير الأساسية وواحداتها أمر على جانب كبير من الأهمية لما له من تأثير مباشر على تعقيد او تسهيل العلاقات الرياضية بين المقادير الفيزيائية .

عندما نعين المقادير الأساسية وواحداتها نقول اننا شكلنا جملة واحدات اساسية للقياس . وهناك نوعان من الجمل الأساسية : يقوم النوع الاول على اعتبار الطول (L) والكتلة (M) والزمن (T) مقادير أساسية ، في حين ان النوع الثاني يقوم على اعتبار الطول (L) والقوة (F) والزمن (T) مقادير أساسية . وفي كل من هذين النوعين عدد من الجمل لا تختلف عن بعضها إلا باختلاف الواحدات المختارة فقط . الجمل المعروفة والاكثر انتشاراً هي جمل النوع الاول ومنها :

١) الجملة السنغثية (C G S) واحداتها الاساسية هي : السانتيمتر (cm)

للطول والغرام (gm) للكتلة والثانية (sec) للزمن .

٢) الجملة المكثية (M K S) واحداتها الاساسية هي : المتر (m) للطول والكيلوغرام (kg) للكتلة والثانية (sec) للزمن .

٣) الجملة الانكليزية (F P S) واحداتها الاساسية هي : القدم (foot) للطول والرطل (pound) للكتلة والثانية (sec) للزمن .

٤) الجملة الانكليزية (FSS) واحداتها الاساسية هي : القدم (foot) للطول والسلغ (slug) الكتلة والثانية (sec) للزمن .

تسمى الجملتان الأوليـان بالجملتين المتريتين لاستعمالها السانتيمتر والمتر والغرام والكيلو غرام (تقسيمات مئوية) ، في حين ان الأخيرتين تعرفان بالجملتين الانكليزتين نظراً لتكوينها في انكلترا . وينتشر استعمالها في انكلترا والولايات المتحدة ودول اخرى . ويوماً بعد يوم يميل العـالم نحو استعمال الجمل المترية وخاصة في المجالات العلمية .

لقد تحدثنا عن هذه الجمل كجمل ميكانيكية . وكل واحدة منهـا كافية تمام الكفاية في أبحاث الميكانيك . أما في الفيزياء بصورة عامة حيث تدخل الكهرطيسية ايضاً فلا يكفي اختيار ثلاثة مقادير اساسية وواحداتها بل تجب اضافة مقدار اساسي آخر يتعلق بالكهرطيسية كالشحنة أو التيار او مايسمى بالكتلة المغناطيسية . فاذا فعلنا ذلك في الجملة السغثية (CGS) باضافـة الشحنة الى المقـادير الأساسية حصلنا على مايسمى بالجملة السغثية الكهربية . ويتجه العلماء بصورة عامة الى استعمال الجملة المكثية (MKS) بعد اضافة شدة التيار اليها كمقدار اساسي وواحدته (الامبير) كواحـدة اساسية . وتتـألف بذلك جملة (MKSA) التي يطلق عليهـا اليوم اسم « الجملة العملية » ويعمم استعمالها يوماً بعد يوم .

لنعد الآن الى طبيعة المقادير الفيزيائية المختلفة ، تلك الطبيعة التي تعبر عنها العلاقات الرياضية او القوانين التي تربط بينها . فاذا اعتبرنا الحجم مثلاً رأينا انه يعطى بعلاقة من الشكل $V = L_1 L_2 L_3$ حيث كل من L_1 , L_2 , L_3 يمثل طولاً اي ان له طبيعة الطول . فللحجم اذن طبيعة مكعب الطول (L) ولذا يمكننا أن نكتب علاقة تشير صراحة الى طبيعة المقدار V (الحجم)، اي $V = L^3$ ونسميها بدستور البعد للحجم .
لنأخذ الآن مقداراً فيزيائياً آخر ، التسارع ، ولنكتب العلاقة (دستور البعد)التي تشير الى طبيعة التسارع بدلالة المقادير الأساسية . يعطى التسارع بعلاقة من الشكل $a = \frac{d^2 L}{d t^2}$ حيث L مسافة او طول و t الزمن . ان تغير الطول له طبيعة الطول وتغير الزمن له طبيعة الزمن . ولذلك فان التسارع ، كما يظهر من العلاقة السابقة ، هو من طبيعة الطول مقسوماً على مربع الزمن . فدستور بعده إذن هو $a = LT^{-2}$. واخيراً لنعتبر القوة من دستور نيوتن $F = m a$. ان للقوة طبيعة جداء الكتلة بالتسارع ولذا فدستور بعدها هو $F = ML T^{-2}$. ويمكننا بنفس الطريقة أن نكتب دستور بعد أي مقدار فيزيائي مستعينين بعلاقة رياضية تربطه بالمقادير الأخرى ، كما فعلنا في الأمثلة السابقة تماماً .

وفي نهاية هذه الفقرة جدول يلخص دساتير الأبعاد والواحدات في الجمل الأكثر رواجاً واستعمالاً . هذا ويمكننا الانتقال من جملة الى اخرى وحساب واحدات المقادير في جملة ما بدلالة واحدات نفس المقادير في جملة اخرى . ولنا أن نستعين بدساتير الأبعاد والعلاقات الفيزيائية عندما وحيثما نشاء . ونأخذ واحدة القوة في الجملة (MKS) كمثال ونحسبها بدلالة واحدة القوة في الجملة(C G S) . ان واحدة القوة في الجملة الأولى هى النيوتن (Newton) . ومن دستور البعد :

$$F = MLT^{-2}$$

نجد ان واحدتها في الجملة (MKS) هي :

$$1\ N = kg \cdot m \cdot sec^{-2}$$

وبتعويض كل واحـدة اساسية في الطرف الأيمن بمـا يساويها في الجملة (C G S) نجد :

$$1\ N = (1000gm)(100\ cm)\ sec^{-2}$$
$$= 10^5\ (gm \cdot cm \cdot sec^{-2})$$

ولكن في الجملة (CGS) ومن دستور البعد للقوة نجد :

$$1\ dyne = 1\ (gm \cdot cm \cdot sec^{-2})$$

وبمقارنة العلاقتين الأخيرتين نجد ان $1\ N = 10^5 dynes$ أي ان واحـدة القوة في الجملة (MKS) وهي النيوتن تساوي 10^5 من واحدة القوة في جملة (CGS) وهي الدينة . وبنفس الطريقة يمكننا أن نستنتج مايكافىء أي واحدة في جملة ما بدلالة الواحدة المقابلة في أية جملة اخرى .

يمكننا أن نجد ايضاً قياس مقدار ما في جملة معينة بدلالة قيـاسه في جملة أخرى . ولنأخذ القوة كمثال . لتكن لدينا القوة F التي قياسها X في الجملة (MKS) التي واحدة القوة فيها هي النيوتن . ما هو قياسها Y في الجملة (CGS) ؟ لدينا $F = X\ Newtons$ ولدينا $1 Newton = 10^5\ dynes$ اذن $F = 10^5\ X\ dynes$ ومنه $Y = 10^5\ X$. لاحظ ان قياس مقدار ما هو العدد الذي يقيسه مجرداً عن الواحدات . لاحظ ايضاً ان واحـدة القوة في (C G S) أصغر من واحدتها في الجملة (M K S) في حين أن قياس القوة في الجملة (CGS) اكبر من قياسه في (MKS) . ففي التحويل من جمـلة إلى أخرى ، إذا كبرت واحدة القياس صغر القياس نفسه والعكس بالعكس .
ونثبت فيما يلي جـدولاً بأهم المقادير الميكانيكية مع دساتير أبعادها وواحداتها في الجملتين (C G S) و (M K S) .

الواحدات والابعاد

MKS (الواحدات)	CGS (الواحدات)	دستور الابعاد	المقدار الفيزيائي
m	cm	L	الطول
kg	gm	M	الكتلة
sec	sec	T	الزمن
m/sec	cm/sec	LT^{-1}	السرعة
m/sec^2	cm/sec^2	LT^{-2}	التسارع
Newton	dyne	MLT^{-2}	القوة
Newton sec	dyne. sec	MLT^{-1}	الاندفاع والدفع
joule	erg	ML^2T^{-2}	الطاقة والعمل
watt	erg/sec	ML^2T^{-3}	الاستطاعة
m^3	cm^3	L^3	الحجم
kg/m^3	gm/cm^3	ML^{-3}	الكثافة
radian	radian	—	الزاوية
radian/sec	radian/sec	T^{-1}	السرعة الزاوية
radian/sec^2	radian/sec^2	T^{-2}	التسارع الزاوي
Newton m	dyne. cm	ML^2T^{-2}	عزم القوة ، المزدوجة
kg.m^2/sec	gm.cm^2/sec	MLT^{-1}	الاندفاع الزاوي
kg.m^2	gm. cm^2	ML^2	عزم العطالة
Newton/m^2	dyne/cm^2	$ML^{-1}T^{-2}$	الضغط



الفصل الثاني

حقل القوى المنتظم
القذائف والسقوط ، الحركة في وسط مقاوم
الحركة المقيدة والاحتكاك

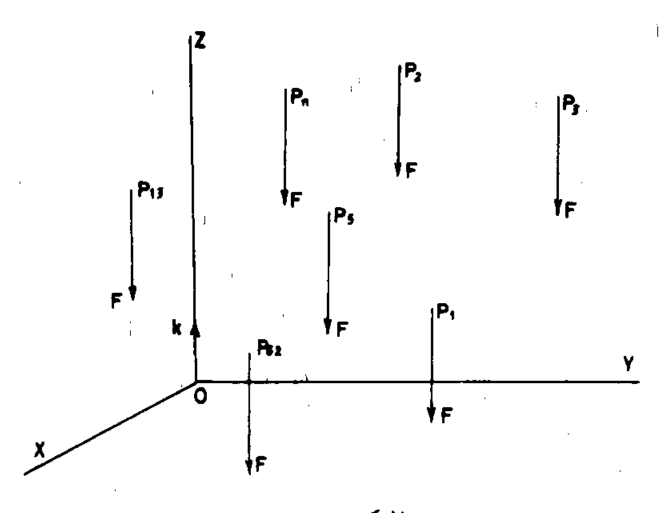
- حقول القوى المنتظمة
- الحركة في حقل منتظم ، التسارع الارضي والوزن ، سقوط الاجسام
- كمون الحقل المنتظم
- الحركة في وسط مقاوم
- الحركة المقيدة وقوى الاحتكاك
- حركة القذائف
- سقوط المظلات



I — حقول القوى المنتظمة :

يقال عن حقل قوى انه منتظم إذا كانت القوة ثابتة في جميع نقاطه. فاذا اعتبرنا القوة موازية للمحور oz من جملة المقارنة المطالية ox yz ومتجهة بعكس اتجاه هذا المحور امكننا ان نكتب القوة على الشكل :

$$\vec{F} = - F \vec{k}$$



الشكل (1)

حيث $\vec{k}$ شعاع واحدة المحور oz و F شدة القوة $\vec{F}$. انظر الشكل (1) .

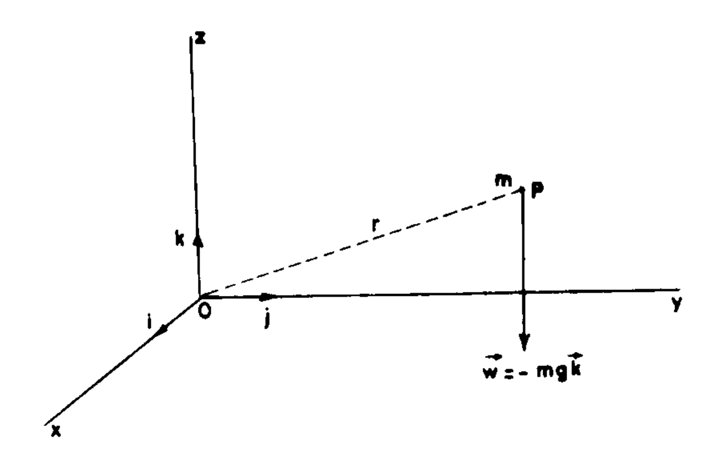
II — الحركة في حقل منتظم ، التسارع الارضي والوزن ، السقوط :

إذا تحرك جسم مادي تحت تأثير حقل قوى منتظم كان تسارعه ثابتاً

وذلك حسب قانون نيوتن الثاني ، وهو معطى بالعلاقة :

$$\vec{a} = -\frac{F}{m}\vec{k} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (2)$$

وهي المعادلة التفاضلية للحركة .



الشكل (2)

ولقد لوحظ تجريبياً ان الأجسام التي تسقط على الأرض سقوطاً حراً من ارتفاعات محدودة يكون لهـا تسارع ثابت . وذلك بفرض أن مقاومة الهواء مهملة أو إذا كان السقوط في الخلاء . وهذا التسارع الثابت يسمى بتسارع الثقالة الأرضية او التسارع الارضي (اختصاراً) . وشدته هي بالتقريب 981 cm/aec² عند سطح البحر . ان هذا التسارع ليس ثابتاً بل يختلف من مكان الى آخر على سطح الارض فهو يزداد كلما ابتعدنا عن خط الاستواء نحو أحد القطبين بسبب تفلطح الكرة الارضية عند الاستواء ، ويتناقص بازدياد الارتفاع عن سطح الارض اي كلما ابتعدنا عن مركز كتلة الارض. فالاجسام اذن تخضع لتأثير التسارع الارضي وبالتالي تكون تحت تأثير قوى تجذبها نحو الارض ومعطاة ، حسب قانون نيوتن ، بالعلاقة :

$$\vec{W} = -mg\vec{k} \tag{3}$$

حيث m هي كتلة الجسم المتبر و g شدة التسارع الارضي . وتسمى القوة $\vec{W}$ بوزن الجسم المادي ذي الكتلة m .

إذا كنا ندرس حركة الاجسام بتأثير الثقالة الارضية في منطقة محدودة على سطح الارض وضمن ارتفاعات صغيرة ، بالنسبة لنصف قطر الارض ، امكننا أن نفترض للسهولة أن الارض منبسطة وان تسارعها ثابت في المنطقة المعنية . ضمن هذا الفرض واضافة الى التقريب القاضي باهمال المقاومة الناجمة عن الهواء تعتبر حركة سقوط الاجسام على الارض بتأثير قوة ثقلها حركة متسارعة بانتظام ، ويطلق عليها اسم السقوط الحر . وتعطى معادلة الحركة بالعلاقة :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -g\vec{k} \quad : \text{او} \quad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\vec{k} \tag{4}$$

ولما كانت هذه العلاقة لا تتعلق بكتلة الجسم m فان الحركة مستقلة عن الكتلة ، اي ان الحركة هي نفسها بالنسبة للاجسام الخفيفة والثقيلة على حد سواء . ومن أبرز الامثلة على الحركة آنفة الذكر حركة القذائف وسندرسها بعد قليل .

III — كمون الحقل المنتظم :

نرى بسهولة ان الحقل المنتظم مشتق من كمون «محافظ» وأن كمونه ، او الطاقة الكامنة لجسيم كتلته واحدة الكتل ويتحرك في هذا الحقل ، يعطى بالعلاقة :

$$U = F(z - z_o) \tag{5}$$

وان هذه الطاقة في حقل الثقالة الارضية تعطى بالعلاقة :

$$U = mg(z - z_o) \tag{6}$$

حيث $U = O$ عندما $z = z_o$. ونسمي المستوى المعين بـ $z = z_o$ بمستوى

المقارنة للكون او مبدأ الكون . ويلاحظ ان الكون المعطى بالعلاقة (6) هو مقدار العمل الذي يقوم به وزن « ثقل » الجسم الذي كتلته m عندما يسقط من المستوى z الى المستوى z_0 ، أي عندما يسقط مسافة شاقولية تساوي $z - z_0$.

IV — الحركة في وسط مقاوم :

يخضع الجسم المتحرك في الحالة العامة إلى قوى اخرى بالاضافة الى ثقله . من هذه القوى تلك التي تعاكس الحركة او تقاومها والتي تنشأ بسبب الحركة في سائل أو غاز . وتسمى هذه القوى بالقوى المقاومة او المخمدة ، كما يسمى الوسط عندئذ وسطاً مقاوماً او مخمداً . لقد وجد تجريبياً ان القوة المقاومة لحركة الجسم في وسط ما لا تتعلق بالوسط فقط وانما تتعلق بسرعة الجسم ايضاً . فوجد مثلاً انها تتناسب طرداً مع السرعة من أجل السرع الصغيرة نسبياً ومع مربع السرعة من أجل سرع أكبر ومع قوى أكبر من أجل السرع الكبيرة . اذا اعتبرنا الجسم خاضعاً لتأثير قوة ثقله وقوة مقاومة الوسط الذي يتحرك فيه كانت معادلة الحركة حسب قانون نيوتن الثاني بالشكل التالي :

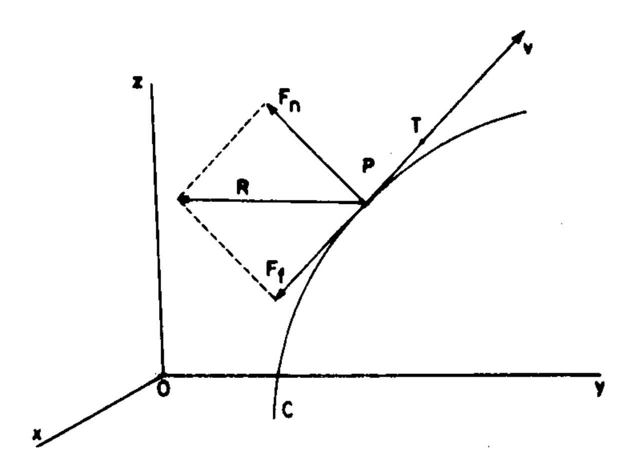
$$m \frac{d^2 \vec{r}}{d t^2} = m \vec{g} + \vec{R}(v) \qquad (7)$$

ويلاحظ أنه عندما تنعدم قوة المقاومة $\vec{R}$ تؤول المعادلة الاخيرة الى علاقة السقوط الحر (4) .

V — الحركة المقيدة وقوى الاحتكاك :

يفرض على الجسيم المتحرك في بعض الحالات ان يسير على منحن او سطح معين ، فنسمي حركته عندئذ حركة مقيدة ونسمي السطح او المنحني الذي يتحرك عليه بالقيد . ونتيجة لهذا القيد فان الجسيم المتحرك يؤثر على القيد بقوة تقابلها قوة رد الفعل التي تساويها بالشدة وتعاكسها بالاتجاه ،

وذلك حسب قانون نيوتن الثالث . لقوة رد الفعل هذه مركبتان احداهما F_n ناظمية على القيد والثانية F_f مماسة له ومحمولة على شعاع السرعة وتعاكسه بالاتجاه . انظر الشكل (3) . فهي اذن قوة مقاومة للحركة، منشأ هذه القوة هو الاحتكاك بين الجسيم المتحرك « الجسم المتحرك بصورة عامة » والسطح او المنحني الذي يتحرك



الشكل (3)

عليه . وتسمى لذلك بقوة الاحتكاك . ولقد وجد تجريبياً ان قوة الاحتكاك $\vec{F}_f$ تتناسب شدتها مع شدة المركبة الناظمية $\vec{F}_n$ لقوة رد الفعل ، أي :

$$\vec{F}_f = -\mu \left| \vec{F}_n \right| \vec{T} \qquad (8)$$

حيث $\vec{T}$ شعاع واحدة مماس المسار و μ عامل الاحتكاك الذي لا يتوقف الا على طبيعة سطح الجسم المتحرك وسطح القيد . واستعملت اشارة الناقص لأن $\vec{T}$ محمول على السرعة في حين أن $\vec{F}_f$ تعاكسها . وتصبح معادلة الحركة بصورة عامة على الشكل :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m\vec{g} + \vec{F}_n + \vec{F}_f \qquad (9)$$

VI — حركة القذائف :

كتطبيق على ما تقدم نود دراسة حركة جسم قذف بسرعة ابتدائية ما مثل $\vec{v}_0$ من موضع بدء $\vec{r}_0$ مثلاً . وسنعتبر لتبسيط الدراسة هنا ان الجسم عبارة عن نقطة مادية كتلتها هي كتلة القذيفة . وسنهمل قوة مقاومة الهواء لحركة القذيفة التي تبقى عندئذ خاضعة لثقلها فقط اثناء حركتها . فحركتها اذن هي حركة سقوط حر تعطى بالعلاقة :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{g} \qquad (10)$$

وقبل البدء بدراسة الحركة لا بد من تعيين جملة المقارنة التي تنسب الحركة اليها . لتكن هذه الجملة هي تلك التي تتعين بالمحاور oxyz التي ينطبق مركزها o على موضع البدء للقذيفة . انظر الشكل (4) . وليكن أحد محاورها oz شاقولياً صاعداً وليكن ايضاً محورها oy بحيث ان السرعة الابتدائية $\vec{v}_0$ واقعة في المستوى الشاقولي oyz . ولتكن عندئذ α الزاوية التي تصنعها $\vec{v}_0$ مع oy .

اذا نظرنا إلى العلاقة (10) فان كل ما نفهمه منها بشكلها هذا هو أن تسارع القذيفة يساوي التسارع الارضي . ولدراسة حركة القذيفة دراسة كاملة يجب ايجاد شعاع السرعة وشعاع التسارع وشعاع الموضع ، أي يجب معرفة المسار معرفة تامة ، وكل ذلك بدلالة الزمن .

آ — السرعة والتسارع :

نرى بكل بساطة ان شعاع التسارع معطى بالعلاقة (10) كما ذكرناقبل قليل. أما شعاع السرعة في اللاحظة t فيمكن الحصول عليه بتكامل العلاقة (10) بين لحظة البدء $t_0 = 0$ واللحظة t . وهذا التكامل يعطي

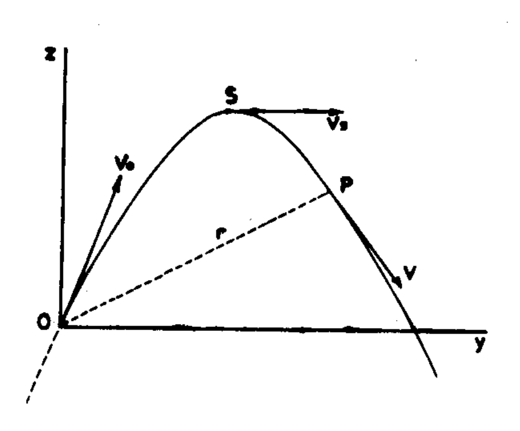
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{g}\,t + \vec{v}_0 \qquad (11)$$

ب) الموضع والمسار

ان تـكامل العلاقة (11) بين $t_0 = 0$ و t يعطيناشعاع الموضع $\vec{r}(t)$ في اللحظة الزمنية t وهو

$$\vec{r}(t) = \tfrac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0\,t + \vec{r}_0 \qquad (12)$$

حيث $\vec{r}_0$ هو شعاع الموضع في لحظة البدء $t_0 = 0$. وإذا ما اعتبرنا ان



الشكل (4)

القذيفة كانت في o في لحظة البدء كان $\vec{r}_0 = 0$ ويصبح شعاع الموضع بالتالي معطى بالعلاقة

$$\vec{r}(t) = \tfrac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0\,t \qquad (13)$$

نرى من العلاقة (11) ان للسرعة الشعاعية في اية لحظة t مركبتين $\vec{v}_0$ و $\vec{g}\,t$. وهذا يدل على ان السرعة في أية لحظة واقعة في المستوى المعين بالشعاعين الثابتين $\vec{v}_0$ و $\vec{g}$. ونرى من العلاقة (13) ان الشعاع الموضع مركبتين الاولى محمولة على $\vec{v}_0$ والثانية محمولة على $\vec{g}$ ، فهو إذن واقع دائماً في المستوى المتعين بالشعاعين $\vec{v}_0$ و $\vec{g}$. ونستنتج لذلك ان مسار القذيفة هو منحن واقع في المستوى الثابت المذكور . ونظراً لكون $\vec{v}_0$ واقعة في المستوى oyz نستنتج ان المسار واقع في ذلك المستوى .

لما كانت $\vec{r}(t)$ تابعاً من الدرجة الثانية بالنسبة للزمن t فان من الممكن الحكم بأن المسار قطع مكافىء . ولتبيان ذلك نكتب معادلته الديكارتية التي تربط بين احداثييه الديكارتيين y و z . ان اسقاط العلاقة (13) على المحورين يعطي

$$y = v_0\, t \cos \alpha \tag{14}$$

$$z = -\tfrac{1}{2}\, g t^2 + v_0 t \sin \alpha \tag{15}$$

حيث v_0 و g يمثلان طويلتي السرعة الابتدائية والتسارع الأرضي وذلك على الترتيب . وبحذف الزمن t من العلاقتين الاخيرتين نحصل على معادلة المسار الديكارتية

$$z = (\tan \alpha)\, y - \left(\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) y^2 \tag{16}$$

ومن الواضح ان هذه العلاقة تمثل قطعاً مكافئاً محوره يوازي المحور oz .

جـ) ذروة المسار :

لما كان المسار قطعاً مكافئاً وكان تسارع القذيفة سالباً (اي باتجاه الشاقول النازل) فان المسار يتحدب نحو الأعلى ويكون له ذروة S تصلها القذيفة بعد زمن t_s ، تبدأ القذيفة بعده بالهبوط . يمكننا تعيين احداثيي الذروة

z_s و y_s ، وزمن وصول القذيفة الى الذروة بملاحظة ان سرعة القذيفة تكون أفقية في لحظة وصولها الى الذروة .

ان مركبتي السرعة بصورة عامة هما حسب العلاقة (11)

$$y' = v_0 \ t \ \cos \alpha \qquad (17)$$

$$z' = -gt + v_0 \sin \alpha \qquad (18)$$

وتصبحان في الذروة :

$$y'_s = v_0 \cos \alpha \qquad (19)$$

$$z_s = -gt_s + v_0 \sin \alpha = 0 \qquad (20)$$

ونجد من هاتين العلاقتين زمن وصول القذيفة الى الذروة وسرعتها فيها ، أي :

$$t_s = \frac{v_0}{g} \sin \alpha \qquad (21)$$

$$y'_s = v_0 \cos \alpha \qquad (22)$$

$$z_s = 0 \qquad (23)$$

ولدى التعويض من (21) في (14) و (15) نجد احداثيي الذروة :

$$y_s = v_0^2 \sin 2\alpha / 2g \qquad (24)$$

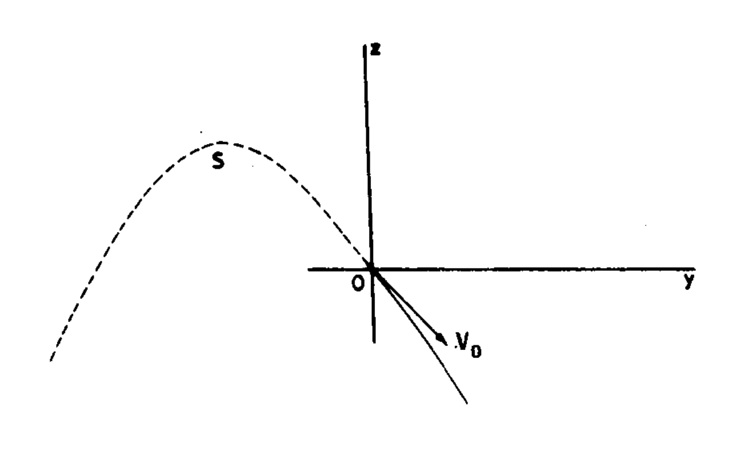
$$z_s = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g \qquad (25)$$

لنلاحظ الآن الحالات المختلفة حسبما تكون راوية القذف α موجبة او سالبة او معدومة :

1) $\alpha > 0$. في هـذه الحالة احداثيا الذروة موجبان والمسار يأخـذ الشـكل المبين في الشـكل (4) .

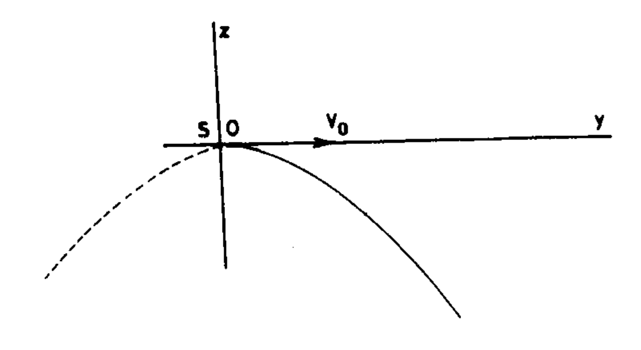
2) $\alpha < 0$. في هذه الحالة $y_s < 0$ و $z_s > 0$ والمسار عندئذ هو كما في الشـكل (5) . والجزء الفعلي من المسار، أي الذي تتعقبه القذيفـة، هو

الجزء المستمر . ونلاحظ ان زمن الوصول الى الذروة سالب في هذه الحالة كما تبين الملاقة (21) . وهذا يعني ان القذيفة تظهر وكأنها كانت في الذروة قبل الزمن t_s .



الشكل (5)

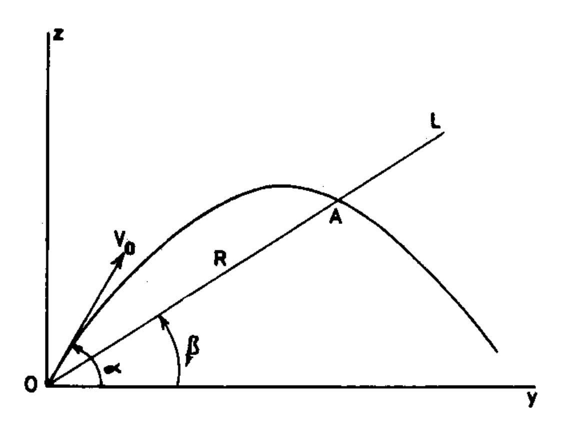
3) $\alpha = 0$ اي ان سرعة البدء افقية والذروة في هذه الحال تقع في المبدأ 0 ، و $t_s = 0$ بالطبع ، الشكل (6) .



الشكل (6)

و) مدى القذيفة على مستو مائل :

تسمى النقطة A حيث يتقاطع المسار مع المستوى OL (المائل على الافق بزاوية β) بنقطة مدى القذيفة على ذلك المستوى . ويسمى بعدها R عن نقطة القذف o بمدى القذيفة على المستوى نفسه . أما الزمن t_A الذي تستغرقه القذيفة حتى تصل إلى نقطة المدى فيدعى بزمن المدى . وعندما تكون A هدف القذيفة يمكن ان نسمي الفترة الزمنية t_A بزمن الرمي ، وهو على غاية من الأهميـة في حالة الرمي على أهداف متحركة اذ يجب ان يتواقت وصول الهدف ووصول القذيفة الى النقطة A . ولحساب زمن الرمي واحداثيي نقطة المدى A والمدى R نكتب معادلتي المسار والمستوى OL اللذين يتقاطعان في A .



الشكل (7)

ان معادلة OL هي

$$z_1 = y_1 \; . \; \tan\beta \qquad (26)$$

أما المسار فيعطى بالعلاقة (13) أو بالعلاقتين (14) و (15) كما رأينا سابقاً .
وفي نقطـة التقاطـع يكون : $y = y_1$ و $z = z_1$ وهـذا يـؤدي الى العلاقات التالية :

$$t_A = \frac{2 v_o}{g} \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} \quad (27)$$

$$y_A = \frac{2v_o^2}{g} \frac{\sin(\alpha - \beta) \cos \alpha}{\cos \beta} \quad (28)$$

$$z_A = \frac{2 v_o^2}{g} \frac{\sin(\alpha - \beta) \cos \alpha}{\cos \beta} . \tan \beta \quad (29)$$

$$R = \frac{2 v_o^2}{g} \frac{\sin(\alpha - \beta) \cos \alpha}{\cos^2 \beta} \quad (30)$$

$$= \frac{v_o^2}{g} [\sin(2\alpha - \beta) - \sin \beta] / \cos^2 \beta \quad (31)$$

ومن الواضح ان المدى أعظمي عندما يكون

$$\frac{dR}{d\alpha} = \frac{2v_o^2}{g} \cos(2\alpha - \beta) / \cos^2 \beta = 0 \quad (32)$$

وهذا يتحقق عندما تكون

$$\alpha = \alpha_m = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (33)$$

وعندئذ تكون قيمة المدى الأعظم مساوية

$$R_m = \frac{v_o^2}{g(1 + \sin \beta)} \quad (34)$$

حالة خاصة : المستوى OL افقي اي $\beta = 0$. تؤول العلاقات السابقة المتعلقة بنقطة المدى الى ما يلي :

$$t_A = \frac{2 v_o}{g} \sin \alpha \quad (35)$$

$$y_A = R = \frac{v_o^2}{g} \sin 2\alpha \quad (36)$$

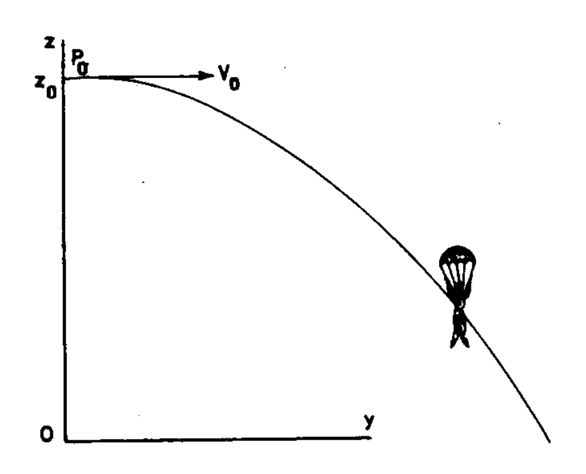
$$z_A = 0 \quad (37)$$

$$\alpha_m = \pi / 4 = 45^\circ \quad (38)$$

$$R_m = v_o^2 / g \quad (39)$$

VIII — حركة المظلي اثناء السقوط :

لنفرض ان طائرة كانت تحلق في لحظة $t_0 = 0$ على ارتفاع z_0 عن سطح الارض وبسرعة افقية v_0 . ولنفرض ايضاً أن مظلياً قذف بنفسه من الطائرة في تلك اللحظة . ان سرعته في لحظـة الانفصال عن الطائرة هي نفس سرعتها آنذاك . ولندرس الآن حركته اعتباراً من اللحظة t_0 والوضع الابتدائي $(0, z_0)$ الى اللحظة t_g التي يصل فيهـا الى الارض في الموضع $(y_g, 0)$ كما يتبين من الشكل (8) الذي اخـترنا فيه المحور الشاقولي oz متجهاً نحو الاسفل .



الشكل (8)

لكتابة معادلة (او معادلات) الحركة لا بد اولاً من تعيين القـوى المؤثرة على الجملة المتحركة (المظلي ومظلته) ولتكن m مجموع كتلتيهما . ان القوى المؤثرة على الجملة « التي نعتبرها نقطة للتبسيط » هي :

1) قوة الثقالة $\vec{F}_g = m\vec{g}$

2) قوة مقاومة الهواء $\vec{F}_r = -\gamma \vec{v}$ حيث يتعلق الثابت γ بكثافة الهواء وبالسطح الظاهري للمظلة كما يراه ناظر باتجاه السرعة

3) قوة دفع التيارات الهوائية التي نفرضها معدومة هنا للتبسيط .

وتكون معادلة الحركة

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{d t^2} = m \vec{g} - \gamma \vec{v} \qquad (40)$$

ولما كانت الحركة مستوية ويتعين مستويها بالشعاعين $\vec{v}_0 , \vec{g}$ اي oyz الشاقولي فان من الممكن التمييز بين اتجاهين oz وoy وذلك باعادة كتابة العلاقة السابقة على الشكل :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{d t^2} = m \vec{g} - \alpha v_y \vec{j} - \beta v_z \vec{k} \qquad (41)$$

وباسقاط هذه العلاقة على المحورين oy , oz نحصل على المعادلتين :

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = m \frac{d v_y}{d t} = -\alpha v_y \qquad (42)$$

$$m \frac{d^2 z}{d t^2} = m \frac{d v_z}{dt} = mg - \beta v_z \qquad (43)$$

ان حل المعادلتين الاخيرتين وذلك بتكاملها بين اللحظتين 0 و t يعطي مركبتي السرعة

$$v_y = v_0 \exp (- \alpha t / m) \qquad (44)$$

$$v_z = \frac{m}{\beta} g [1 - \exp (- \beta t / m)] \qquad (45)$$

حيث :

$$\exp (x) = e^x \qquad (46)$$

كما ان تكامل المعادلتين (44) ,(45) مرة أخرى بين o و t يعطي المعادلتين الوسيطيتين للمسار :

$$y = \frac{m}{\alpha} v_0 [1 - \exp(-\alpha t/m)] \qquad (47)$$

$$z = z_0 + t \frac{mg}{\beta} + \frac{m^2}{2} g [1 - \exp(-\beta t/m)] \qquad (48)$$

اما التسارع بدلالة الزمن فانه ينتج عن اشتقاق علاقتي السرعة ويعطي ذلك

$$a_y = -\frac{\alpha}{m} v_0 \exp(-\alpha t/m) \qquad (49)$$

$$a_z = g \exp(-\beta t/m) \qquad (50)$$

ونلاحظ من العلاقتين (44) و (45) انه بعد زمن كبير نسبياً يقترب المقداران $\exp(-\alpha t/m)$ و $\exp(-\beta t/m)$ من الصفر وتأخذ السرعة قيمة ثابتة تسمى بالسرعة الحدية ومعطاة بالعلاقتين :

$$(\dot{v}_y)_f = 0 \qquad (51)$$

$$(v_z)_f = mg/\beta \qquad (52)$$

أما زمن الوصول الى الارض فيتعين من تعويض z بصفر و t بـ t_g في العلاقة (48) ، كما نحصل على موضع سقوط المظلي على الارض y_g بتعويض t_g الناتجة في العلاقة (46) .



الفصل الثالث

حقل القوى المركزي والحركة الفلكية

— تعريف الحقل المركزي
— خواص الحقل المركزي
— معادلات الحركة في الحقل المركزي
— اشكال معادلات الحركة
— تعيين المسار من الحقل المركزي وبالعكس
— الطاقة الكامنة في الحقل المركزي وعلاقة انحفاظ الطاقة
— حركة جسيم في حقل مركزي متناسب عكسا مع مربع البعد
— قوانين كبلير الفلكية



I — تعريف الحقل المركزي :

يقال عن حقل القوى أنه مركزي إذا كانت القوة المؤثرة على جسيم (نقطة مادية) كتلته m في أية نقطة من نقاطه محققة الشرطين التاليين :

آ — القوة محمولة على مستقيم مار من نقطة O تسمى مركز الحقل — الشكل (1) .

ب — شدة القوة تابعة للبعد بين الجسيم والنقطة الثابتة .

الشكل (1)

ويمكن وفق الشرط الأول أن تكون هذه القوة جاذبة أو دافعة ويسمى الحقل عندئذ جاذباً أو دافعاً بالترتيب . ونستطيع أن نكتب القوة على الشكل التالي :

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{r}_1 \qquad (1)$$

حيث $\vec{r}_1 = \vec{r} / r$ هو شعاع واحدة حامل القوة و $\vec{r}$ و r هما بالترتيب شعاع موضع الجسيم وبعده عن مركز القوة . أما f (r) فيسمى تابع القوة وهو يعين شدتها الجبرية .

II — خواص الحقل المركزي :

نقصد بخواص الحقل الصفات التي تتميز بها حركة جسيم خاضع لذلك الحقل . وعلى هذا فان حركة الجسيم في حقل مركزي تتميز بالصفات التالية :

آ — المسار مستو :

ليكن الجسيم P المتحرك في الحقل المركزي — الشكل (1) — حيث

تعطى القوة في كل نقطة منه بالعلاقة (1) . ولتكن $\vec{v}$ سرعته ، ولنعتبر الشعاع $\vec{h}$ الممثل للجداء الشعاعي لسرعة الجسيم وشعاع موضعه :

$$\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{v} \qquad (2)$$

سنبين أولاً أن هذا الشعاع $\vec{h}$ ثابت . ولهذا الغرض يكفي أن نبين أن مشتقه معدوم . وبالاشتقاق نجد :

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \vec{v} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$= o + \vec{r} \wedge \vec{F} / m$$

$$= \frac{r}{m} f(r) \vec{r_1} \wedge \vec{r_1} = o \qquad (3)$$

حيث استعملنا قانون نيوتن الثاني $\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ وكذلك العلاقة (1) .

إذاً فالشعاع $\vec{h}$ ثابت . فستنتج من ثبات $\vec{h}$ في المنحى والاتجاه أن $\vec{r}$ و $\vec{v}$ واقعان في مستو واحد دائماً ، وأن هذا المستوي متعامد مع الشعاع الثابت $\vec{h}$. إذاً ، فالحركة مستوية أو ان مسار الجسيم مستو .

ب ـ الاندفاع الزاوي محافظ :

يعطى الاندفاع الزاوي للجسيم المتحرك بالعلاقة التعريفية

$$\vec{\Omega} = \vec{r} \wedge \vec{p} \qquad (4)$$

أي أنه عزم الاندفاع الخطي للجسيم حول مركز الحقل . ونرى أن :

$$\vec{\Omega} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = m\vec{h} \text{ ثابت} \qquad (5)$$

ولما كان $\vec{h}$ ثابتاً فان Ω ثابت ، ويدل ذلك على ان الاندفاع الزاوي $\vec{\Omega}$ محافظ .

ج ـ الحركة خاضعة لقانون السطوح :

ينص هذا القانون على ان شعاع موضع الجسيم المتحرك $\vec{r}$ يمسح مساحات متساوية خلال فترات زمنية متساوية ، أي أن السرعة السطحية ثابتة . وللبرهان على أن الحقل المركزي يحقق هذه الخاصة يجب أن نبرهن على أن المشتق بالنسبة للزمن للسطح A الذي يمسحه شعاع الوضع ثابت .

لنفرض أن مستوي الحركة هو المستوي oxy وأن مركز الحقل هو مبدأ الاحداثيات o . لتكن P و Q موضعي الجسيم المتحرك في اللحظتين t و $\Delta t + t$. حيث Δt فترة زمنية قصيرة جداً . إذا اعتبرنا المحور ox مبدأ لقياس السطوح التي يمسحها شعاع الموضع $\vec{r}$ فاننا نسمي السطح الذي يحدد بـ ox و op و $\overset{\frown}{MP}$ بالمقدار A . أما المقدار ΔA فيمثل السطح المحصور بين $\overset{\frown}{PQ}$, OQ , OP ، ويمكن أن نأخذ كقيمة تقريبية له المثلث OPQ .

ويلاحظ أن ΔA هو السطح الممسوح خلال الفترة Δt . انظر الشكل (2) . إذا مثلنا السطح ΔA بمقدار شعاعي $\vec{\Delta A}$ وكان هذا الأخير محمولاً على oz فان بامكاننا أن نعبر عنه عندئذ بالعلاقة :

الشكل (2)

$$\Delta \vec{A} = \tfrac{1}{2}\, \vec{r} \wedge \Delta \vec{r} \qquad (6)$$

لأن سطح المثلث OPQ الممثل لـ ΔA هو القيمة المطلقة للطرف الأيمن من هذه العلاقة . بما أن $\vec{r}$ و $\Delta \vec{r}$ بمستو واحد وبالتالي $\Delta \vec{A}$ محمول على oz فان $\frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t}$ محمول على oz أيضاً مهما كان t و Δt . ومنه نجد :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{h} \qquad (7)$$

وهي السرعة السطحية ممثلة شعاعياً . وشدة هذا الشعاع (قيمته المطلقة) هي السرعة السطحية كمقدار سلمي . بما أن $\vec{h}$ ثابت فان $d\vec{A} / dt$ ثابت أيضاً . فالسرعة السطحية إذاً ثابتة ، وهذا ما كنا نحاول البرهان عليه . ويسمى المقدار الثابت $\frac{1}{2}$ h أحياناً بثابت السطوح .

III — معادلات الحركة في الحقل المركزي :

نظراً لكون القوة المؤثرة على الجسيم محمولة على شعاع موضعه فان من الأسهل أن نستخرج معادلات الحركة في الاحداثيات القطبية المستوية بدلاً من الاحداثيات الديكارتية . إذا كان r و Θ الاحداثيين القطبيين و $\vec{r}_1$ شعاع واحدة r و Θ_1 شعاع واحدة المحور المتعامد معه ، كما يبين الشكل (3) فان :

$$\vec{r} = r \, \vec{r}_1 \qquad (8)$$

وللحصول على السرعة والتسارع نشتق $\vec{r}$ مرتين بالنسبة للزمن . وهذان المشتقان سيحتويان على مشتق الشعاعين المتغيرين $\vec{r}_1$ و $\vec{\Theta}_1$. ولذلك سنعمد أولاً إلى حساب مشتقات هذين الشعاعين .

الشكل (3)

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{i}\cos\Theta + \vec{j}\sin\Theta \\ \vec{\Theta}_1 &= -\vec{i}\sin\Theta + \vec{j}\cos\Theta \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ Θ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_1}{d\Theta} &= -\vec{i}\sin\Theta + \vec{j}\cos\Theta = \vec{\Theta}_1 \\ \frac{d\vec{\Theta}_1}{d\Theta} &= -\vec{i}\cos\Theta - \vec{j}\sin\Theta = -\vec{r}_1 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

أما بالنسبة للزمن فان :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_1}{dt} &= \frac{d\vec{r}_1}{d\Theta}\frac{d\Theta}{dt} = \Theta'\vec{\Theta}_1 \\ \frac{d\vec{\Theta}_1}{dt} &= \frac{d\vec{\Theta}_1}{d\Theta}\frac{d\Theta}{dt} = -\Theta'\vec{r}_1 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

باستعمال هذه المشتقات في حساب السرعة والتسارع فاننا نجد :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r'\vec{r}_1 + r\Theta'\vec{\Theta}_1 \qquad (12)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(r'' - r\Theta'^2\right)\vec{r}_1 + \left(r\Theta'' + 2r'\Theta'\right)\vec{\Theta}_1 \qquad (13)$$

إذا طبقنا الآن قانون نيوتن الثاني $\vec{F} = m\,\vec{a}$ على الجسيم المتحرك P مستعملين المعادلتين (1) و (13) ، ثم اسقطنا العلاقة الناتجة (وهي المعادلة الشعاعية للحركة) على المحورين المتحركين $\vec{r}_1$ و $\vec{\Theta}_1$ فاننا نحصل على المعادلتين القطبيتين للحركة وهما :

$$r'' - r\,\Theta'^2 = f(r) / m \qquad (14)$$

$$r\,\Theta'' + 2\,r'\,\Theta' = 0 \qquad (15)$$

حيث تشير الفتحات في كل ما تقدم إلى الاشتقاقات بالنسبة للزمن .

إذا كان تابع القوة $f(r)$ معروفاً أمكن حل المعادلتين التفاضليتين (14) و (15) بدلالة الزمن وبالتالي إيجاد ما نسميه بالمعادلتين الوسيطيتين للمسار :

$$r = r(t) \qquad (16)$$

$$\Theta = \Theta(t) \qquad (17)$$

وإذا أمكن حذف الوسيط (وهو الزمن t) بين هاتين العلاقتين حصلنا عندئذ على المعادلة القطبية للمسار :

$$F(r, \Theta) = 0 \qquad (18)$$

IV — اشكال معادلات الحركة :

نستطيع كتابة معادلات الحركة بأربعة أشكال مختلفة ومتكافئة وهي :

آ ـ الشكل الاول :

تمثل المعادلتان (14) و (15) الشكل الأول لمعادلات الحركة . ومن هذا الشكل نستطيع استخراج الأشكال الأخرى .

ب ـ الشكل الثاني :

ان استعمال العلاقتين (12) و (8) في العلاقة (2) يقود إلى المعادلة :

$$r^2\,\Theta' = h \text{ ثابت} \qquad (19)$$

ونرى باشتقاق هذه المعادلة الأخيرة أنها تكافىء المعادلة الثانية (15) من الشكل الأول لمعادلات الحركة . أما استعمال (19) في المعادلة (14) فانه يؤدي إلى :

$$r'' - h^2/r^3 = f(r) / m \qquad (20)$$

والعلاقتان الأخيرتان (19) و (20) تؤلفان الشكل الثاني لمعادلات الحركة . إن الفرق الملحوظ بين الشكل الثاني والشكل الأول هو أن المعادلة (20) من الشكل الثاني لا تحوي إلا r والثابتين h , m ، ويمكن حلها مباشرة للحصول على r بدلالة t . وبعد ذلك يسهل حل (19) بعد معرفة r . أما في معادلتي الشكل الأول (14) و (15) فالمتحولات غير منفصلة ، وهذا يجعل الحل أكثر صعوبة .

ج ـ الشكل الثالث :

إذا انتقلنا من المشتقات بالنسبة للزمن إلى المشتقات بالنسبة للزاوية القطبية Θ ، أي إذا حذفنا الزمن t بين المعادلتين (19) و (20) فاننا نحصل على الشكل الثالث لمعادلات الحركة ، وهي :

$$\frac{d^2r}{d\Theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 - r = r^4 f(r) / mh^2 \qquad (21)$$

وذلك بالاضافة إلى المعادلة (19) . إذاً (19) و (21) تمثلان الشكل الثالث . ويلاحظ أن المعادلة (21) هي المعادلة التفاضلية القطبية للمسار ولا دخل للزمن فيها . حل هذه المعادلة يعين المسار وحل المعادلة (19) يعين الحركة لأنه يعطي Θ بدلالة الزمن .

د ـ الشكل الرابع :

قد يكون مفضلاً في بعض الأحيان أن نستعمل بدلاً من r متحولاً آخر $u = \frac{1}{r}$. فاذا انتقلنا من r إلى u في المعادلة (21) آلت هذه المعادلة إلى الصيغة التالية :

$$\frac{d^2u}{d\Theta^2} + u = -f\left(\frac{1}{u}\right) / m h^2 u^2 \qquad (22)$$

وأما (19) فتصبح :

$$\Theta' = \frac{d\Theta}{dt} = h u^2 \qquad (23)$$

وهما تمثلان الشكل الرابع لمعادلات الحركة . وهنا نلاحظ أيضاً أن أولاهما تحدد المسار وثانيتها تعين الحركة عليه .

V — تعيين المسار من الحقل المركزي وبالعكس :

إذا كان الحقل المركزي معلوماً ، أي اذا عرف التابع $f(r)$ ، فيمكن الحصول على المسار بالطرق التالية :

اولا : بمكاملة المعادلتين التفاضليتين (14) و (15) أو المعادلتين (19)و(20) حيث نحصل على المعادلتين الوسيطيتين للمسار :

$$r = r(t)$$
$$\Theta = \Theta(t)$$

والوسيط هو الزمن ويؤدي حذفه بينها الى المعادلة الهندسية للمسار بشكلها القطبي :

$$F(r, \Theta) = 0$$

ثانيا : كما أن تكامل المعادلة (21) يؤدي الى المعادلة القطبية الأخيرة .

ثالثا : وأما المعادلة (22) فتؤدي بالتكامل الى معادلة للمسار من الشكل :

$$\varphi(u, \Theta) = 0$$

والنتيجة في جميع الحالات واحدة وتؤدي الى المسار نفسه ، فهي متكافئة . أما اذا كان المسار معلوماً فمن السهل عندئذ أن نستنتج الحقل

المركزي منه ، أي ان نستنتج التابع $f(r)$. بصورة خاصة نحصل من المعادلتين (21) و (22) على عبارتين لهذا التابع ، وهما :

$$f(r) = \frac{mh^2}{r^4}\left[\frac{d^2 r}{d\Theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 - r\right] \qquad (24)$$

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = -mh^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\Theta^2} + u\right] \qquad (25)$$

IV — الطاقة الكامنة في الحقل المركزي وعلاقة انحفاظ الطاقة :

بما أن القوة في الحقل المركزي تابعة للموضع فان من السهل عندئذ أن نرى أنها تشتق من كمون . أي :

$$\vec{F}(r) = f(r)\,\vec{r_1} = -\,\vec{Grad}\,V(r) \qquad (26)$$

أو ان تابع القوة $f(r)$ مشتق من تابع الكمون $V(r)$. أي :

$$f(r) = -dV(r)\,/dr \qquad (27)$$

وبالتالي فان الكمون يتعين بالعلاقة :

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr \qquad (28)$$

حيث r_0 هو مبدأ قياس الكمون ، ونعتبره المكان الذي تنعدم فيه القوة (ينعدم فيه الحقل المركزي) أي المكان الذي ينعدم فيه $f(r)$. اذاً :

$$f(r_0) = 0 \qquad (29)$$

في حالة حقل من الشكل $f(r) = \frac{c}{r^2}$ مثلاً نعتبر $r_0 = \infty$ لأن $f(\infty) = 0$ وبالتالي $V(\infty) = 0$. فاللانهاية في هذه الحالة تعتبر مبدأ

للكون . أما اذا كان الحقل بحيث $f(r) = cr^3$ مثلاً فان $r_0 = 0$ لأن $f(0) = 0$ وأيضاً $V(0) = 0$. فمبدأ الاحداثيات هنا يؤخذ كمبدأ لقياس الكمون .

ومهما يكن من أمر فان تعيين مبدأ الكمون ليس على جانب كبير من الأهمية لأن ما يهمنا عملياً هو فروق الكمون لا الكمون نفسه ، وهذه الفروق لا تتأثر باختيار المبدأ ، اللهم الا بالاشارة أحياناً . ولهذا السبب فان بالامكان مخالفة الاصطلاح السابق عندما نجد ذلك مناسباً .

بعد أن عينا الكمون (الطاقة الكامنة) ولما كان هذا الكمون تكاملاً للقوة (أي القوة مشتقة من كمون) فاننا نكتب مبدأ انحفاظ الطاقة الكلية :

$$E = V + T = \text{ثابت} \tag{30}$$

حيث T تمثل الطاقة الحركية للجسيم و V طاقته الكامنة و E طاقته الكلية . ان استعمال العلاقتين (12) و (30) معاً يعطي :

$$T = E - V = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m (r'^2 + r^2 \Theta'^2) \tag{31}$$

أما استعمال (19) في (31) فانه يعطي :

$$r'^2 + \frac{h^2}{r^2} = \frac{2}{m} (E - V) \tag{32}$$

ونستطيع بسهولة أن نرى أن هذه المعادلة تأخذ الشكلين التاليين :

$$\frac{1}{r^4} \left[\left(\frac{dr}{d\Theta} \right)^2 + r^2 \right] = \frac{2 (E - V)}{mh^2} \tag{33}$$

$$\left(\frac{du}{d\Theta} \right)^2 + u^2 = \frac{2 (E - V)}{mh^2} \tag{34}$$

ان هذه المعادلات الأربع الأخيرة كلها متكافئة ويمكن استعمال أي منها كمعادلة للحركة حينما تكون E , V معلومتين . وسنرى فيما بعد كيف تستعمل

احداها وهي الأخيرة لتعيين مسار الجسم المتحرك في حقل مركزي .

IV — حركة جسيم في حقل مركزي متناسب عكسا مع مربع البعد :

ان دراسة حركة الجسم في حقل متناسب عكساً مع مربع البعد تلقي ضوءً ساطعاً على كيفية استعمال المعلومات السابقة ، كما أن هذه الدراسة تنطبق على حركة جسيم في حقل جاذبية مركزي أو حقل كهربائي جاذب أو دافع . ففي الأول ، أي حقل الجاذبية ،تكون القوة متناسبة عكساً مع مربع البعد بين الجسم ومركز الحقل كما أن هذه القوة هي قوة جاذبة تحاول تقريب الجسم من مركز الحقل . أما في الحقل الكهربائي فتكون القوة متناسبة عكساً مع مربع المسافة بين الجسم المشحون والشحنة الكهربائية التي تسبب الحقل والتي هي مركز الحقل . في الحالتين القوة متناسبة عكساً مع مربع المسافة الا أن القوة قد تكون موجبة (دافعة) أو سالبة (جاذبة) وذلك بالنظر الى توجيه شعاع الموضع الذي شعاع واحدته $\vec{r}_1$ من مركز القوة بعيداً عنه الى الجسم . سندرس فيما بعد حقل التجاذب الكوني بالتفصيل وكذلك حركة جسيم كهربائي في حقل كهربائي مركزي وذلك في حينه . على كل حال نعتبر الآن الشكل العام للقوة المركزية بالصيغة الرياضية :

$$\vec{F} = - \frac{D}{r^2} \vec{r}_1 \qquad (35)$$

حيث D ثابت موجب أو سالب حسبما تكون القوة جاذبة أو دافعة . ويتضح من هذه العلاقة أن تابع القوة هو :

$$f(r) = - \frac{D}{r^2} \qquad (36)$$

اذا استعملنا الآن معادلة الحركة (22) التي وجدناها سابقاً رأينا أنها تأخذ الشكل :

$$\frac{d^2u}{d\Theta^2} + u = \frac{D}{mh^2} \qquad (37)$$

وحل هذه المعادلة التفاضلية يعطي المعادلة القطبية للمسار . وهذا الحل هو من الشكل :

$$u = \frac{D}{mh^2} + C \cos(\Theta - \Theta_0) \qquad (38)$$

حيث C, Θ_0 ثابتا التكامل . أما الثابت Θ_0 فيمكن أخذه مساوياً للصفر ، وهذا يكافىء تدوير المحاور الاحداثية بالمقدار Θ_0. وأما الثابت C فيمكن تعيينه من استعمال علاقة انحفاظ الطاقة (34) مع معادلة المسار الاخيرة (38) بعد أخذ $\Theta_0 = 0$:

$$C^2 \sin^2\Theta + \left[\frac{D}{mh^2} + C\cos\Theta\right]^2 = \frac{2(E - V)}{mh^2} \qquad (39)$$

باصلاح هذه العلاقة جبرياً واستعمال عبارة الكمون :

$$V = -\int_{\infty}^{r} f(r)dr = -\frac{D}{r} = -D\left(\frac{D}{mh^2} + C\cos\Theta\right) \qquad (40)$$

فاننا نجد :

$$C^2 = \frac{D^2}{m^2h^4} + \frac{2E}{mh^2} \qquad (41)$$

وتأخذ عندئذ معادلة المسار الشكل :

$$u = \frac{1}{r} = \frac{D}{mh^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2Emh^2}{D^2}}\cos\Theta\right] \qquad (42)$$

تمثل هذه المعادلة الشكل العام للمعادلة القطبية للقطوع المخروطية وهي :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\Theta} \qquad (43)$$

أو :

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}\ (1 + e \cos \Theta\ ) \qquad (44)$$

بمقارنة العلاقتين (42)و(44) نجد أن المسار الذي تحدده الأولى هو قطع مخروطي وسيطه :

$$p = mh^2 / D \qquad (45)$$

وتباعده المركزي :

$$e = \sqrt{1 + 2mh^2E / D^2} \qquad (46)$$

ولما كان التباعد المركزي هو الذي يحدد نوع المسار فاننا نميز بين ثلاث حالات مختلفة :

اولا : عندما تكون الطاقة الكلية للجسيم المتحرك موجبة ($E > 0$) فان التباعد المركزي (46) يكون أكبر من الواحد . وعندئذ يكون المسار قطعاً مخروطياً زائداً.

ثانيا : إذا كانت الطاقة الكلية معدومة ($E = 0$) فان التباعد المركزي يساوي الواحد ($E = 1$) والمسار قطع مكافىء.

ثالثا : وأخيراً إذا كانت الطاقة الكلية سالبة ($E < 0$) فالتباعد المركزي أصغر من الواحد ($e < 1$) والمسار قطع ناقص.

وفيما يلي سنبين تأثير اتجاه الحقل المركزي على نوع المسار ، فندرس حالة الحقل الدافع وحالة الحقل الجاذب كلاً على انفراد .

آ ــ حالة الحقل المركزي الدافع :

في هذه الحالة تتجه القوة المؤثرة على الجسيم بعيداً عن مركز الحقل فيكون تابع القوة موجباً ، $f(r) > 0 = \frac{-D}{r^2}$. وهذا يستوجب عندئذ أن يكون الثابت D سالباً ($D < 0$) . وتنطبق على هـذه الحالة

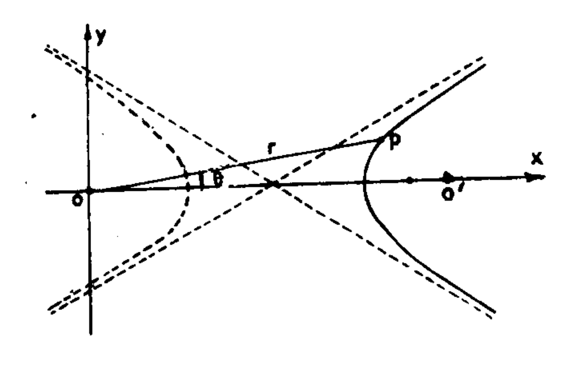
حالة حقل التدافع الكهربائي بين شحنة ثابتة وشحنة متحركة تتفق معها بالاشارة . وإذا حسبنا الطاقة الكلية للجسيم :

$$E = T + V = \frac{1}{2} mv^2 - \int_{\infty}^{r} \frac{-D}{r^2} dr \qquad (47)$$

وجدنا أن :

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{D}{r} > 0 \qquad (48)$$

فالطاقة الكلية موجبة حتماً لأن $D < 0$. نستنتج من ذلك أن المسار قطع زائد أحد محرقيه هو مركز الحقل ، كما يبين الشكل (4) . ولما



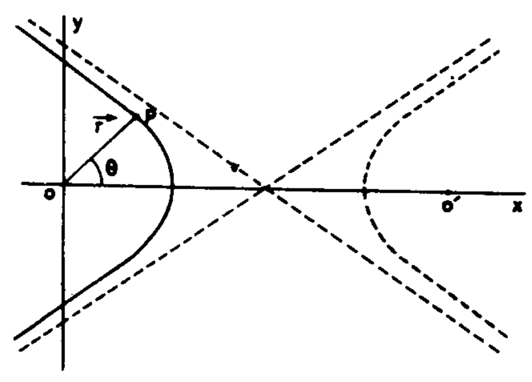
الشكل (4)

كان للقطع الزائد فرعان فيجب أن نحدد ما إذا كان الجسيم يتحرك على الفرع الأول أو الثاني . لكن كون الحقل دافعاً والوسيط p سالباً ، لأن D سالبة ، يحتم أن تكون الحركة على الفرع الذي لا يحوي مركز الحقل كمحرق . فاذا كانت O مركز الحقل فالمسار هو الفرع المستمر من القطع .

ب ـ حالة الحقل المركزي الجاذب :

تتجـه القوة في هذه الحالة نحو مركز الحقل كما في حالة حركة كتلة مادية حول كتلة أخرى أو حالة حركة جسيم مشحون حول شحنة تخالفه بالاشارة . وتكون الطاقة الكلية في هذه الحالة

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{D}{r}$$



الشكل (5)

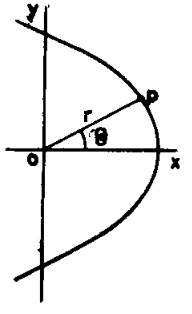
موجبة أو سالبة أو معدومة وذلك حسب شروط البدء ، إذ أن الطاقة الكلية هنا محافظة (ثابتة) .

$$E = E_0 = \frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{D}{r_0}$$

وسنعتبر لذلك الحالات الثلاث التالية :

اولا : $v_0^2 > \frac{2D}{mr_0}$. في هذه الحالة

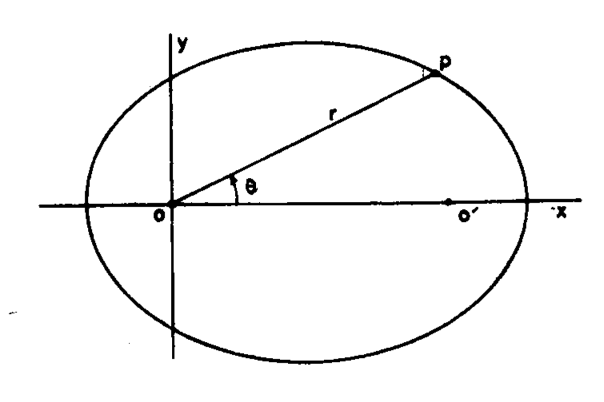
تكون $E = E_0 > 0$ وبالتالي فالمسار قطع زائد . والفرع المقبول هو الذي يحوي مركز الحقل كمحرق له . وهذا ما يمثله الشكل (5) .



الشكل (6)

ثانيا : إذا كان $v_0{}^2 = \frac{2D}{mr_0}$ فان $E = E_0 = O$ ويكون التباعد المركزي للقطع مساوياً الواحد ($e = 1$) والمسار قطع مكافىء محرقه مركز الحقل O ، كما يبين الشكل (6) .

ثالثا : وأخيراً إذا كان $v_0{}^2 < \frac{2\,D}{mr_0}$ فان $E = E_0 < O$ ويكون $e < 1$.
وعندئذ يكون المسار قطعاً ناقصاً أحد محرقيه هو مركز الحقل O كما يبين الشكل (7) .



الشكل (7)

ملاحظة : من الحركات التي تنطبق عليها الدراسة السابقة ما يلي :

آ ـ حركة النيازك والمذنبات التي ترسم قطوعاً زائدة وربما مكافئة وهي تأتي من الفضاء وتمر بالقرب من الشمس ثم تأخذ بالابتعاد عنها وتغادر المجموعة الشمسية دون ان تعود اليها . كما أن هناك بعض الكتل المادية التي تأخذ حركة مشابهة حول الأرض .

ب ـ حركة الكواكب حول الشمس كالأرض مثلاً وهي تسير على قطوع ناقصة تشكل الشمس محرقاً لها . وسندرس في الفقرة التالية هذه الحركة بالتفصيل نظراً لأهميتها . وتكمن هذه الدراسة في مناقشة قوانين كبلر الفلكية .

ج ـــ حركة الالكترون حول النواة بتأثير حقلها الكهربائي المتمركز فيها حيث يرسم الالكترون قطوعاً ناقصة محرقها النواة .

د ـــ حركة جسيم α أو البروتون جانب النواة حيث يرسم قطعاً زائداً يقع محرقه البعيد في مركز الحقل الكهربائي للنواة أو في النواة .

VIII – قوانين كبلر الفلكية :

لقد وضع كبلر قوانينه في الحركة الفلكية قبل أن يضع نيوتن قوانين الميكانيك . وتنص قوانين كبلر على ما يلي :

القانون الاول : إن مسار كل كوكب حول الشمس قطع ناقص تقع الشمس في أحد محرقيه .

القانون الثاني : ان شعاع الموضع الذي مبدأه الشمس ونهايته الكوكب المتحرك يمسح سطوحاً متساوية في أزمنة متساوية (أي أن الحركة الفلكية خاضعة لقانون السطوح) .

القانون الثالث : ان مربع دور حركة الكوكب حول الشمس يتناسب مع مكعب نصف المحور الكبير لمساره .

لكي نبرهن على صحة قوانين كبلر هذه ندرك أولاً أن الكوكب أثناء حركته يخضع لحقل قوى مركزي هو حقل جاذبية الشمس للكوكب وهو حقل متناسب عكساً مع مربع البعد بين الكوكب والشمس (بل بين مركزيهما). ولذا تنطبق عليه الدراسة السابقة . وقد رأينا عندئذ أن المسار هو قطع ناقص مركز القوة أحد محرقيه ، وأن الحركة خاضعة لقانون السطوح كخاصة من خواص الحركة في الحقل المركزي . فالقانونان الأول والثاني اذاً مبرهنان سلفاً . ويبقى أن نبرهن على صحة قانون كبلير الثالث .

إذا كان a و b نصفي المحورين الكبير والصغير للمسار فان مساحة السطح الذي يحصره المسار يعطى بالعلاقة :

$$A = \pi a b \qquad (49)$$

وقد رأينا سابقاً ان السرعة السطحية تعطى بالعلاقة

$$A' = \frac{dA}{dt} = h\ /2 \qquad (50)$$

إن دور الحركة هو الزمن اللازم ليقطع الكوكب مساره مرة واحدة أو ليمسح شعاع موضعه سطح المسار . اذاً فالدور :

$$P = \frac{A}{A'} = 2\pi\ a\ b\ /\ h \qquad (51)$$

ولكي نتخلص من h في هذه العلاقة نستعمل العلاقتين التاليتين للوسيط p ,الأولى

$$p = mh^2\ /\ D \qquad (52)$$

وهي التي وجدناها سابقاً ، والثانية

$$p = a(1 - e^2) \qquad (53)$$

وهي من خواص القطع الناقص . وبحذف الوسيط p بين هاتين العلاقتين الاخيرتين نجد :

$$h^2 = \frac{D}{m}\ a\left(1 - e^2\right) \qquad (54)$$

كما ان من خواص القطع الناقص العلاقة

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \qquad (55)$$

وأخيراً باستعمال (54) و (55) في علاقة الدور (51) نجد :

$$P = 2\pi\sqrt{m\ /\ D}\ \ a\sqrt{a} \qquad (56)$$

أو :

$$P^2 = (4\pi^2 m\ /\ D)\ a^3 \qquad (27)$$

وهذه العلاقة مكافئة لنص قانون كبلير الثالث الذي ينص على ان مربع الدور متناسب مع مكعب نصف المحور الكبير للمسار . وبذلك نكون قد اثبتنا قوانين كبلير استناداً إلى خواص الحقل المركزي . ونلخص في الجدول التالي بعض المعلومات الفلكية عن مجموعتنا الشمسية .

IX- معلومات فلكيــة حول المجموعة الشمسية

	الشمس	عطارد	الزهرة	الارض القمر	المريخ	المشتري	زحـل	اورانوس	نبتون	بلوتو
متوسط بعده عن الشمس (مليون كيلومتر)	—	58.5	108	150 0.384	227	778	1427	2871	4498	5910
سنته (دور حركته حول الشمس (سنة ارضية)	—	0.24	0.61	1 0.075	عن الارض 1.9	11.9	29.5	84	164.8	248.4
نصف قطر دائرته الاستوائيـة (الف كم)	696	2.42	6.2	6.38 1.738	حول الارض 3.4	71.4	60.4,	23.8	22.3	2.96
كتلتـه (10^{24} كيلوغرام) .	2000000	0.32	4.9	5.98 0.074	0.64	1900	750	87	103	5.4
متوسط كثافته (غرام/سم 2)	1.42	5.3	4.95	5.52 3.34	3.95	1.33	0.70	1.56	2.28	400
متوسط تسارع الجاذبية على سطحه (متر/ثا2)	273	3.6	8.5	9.8 1.62	3.8	26	11.2	9.4	15	8
سرعة الهرب او التخلص منه (كيلومتر/الثانية) .	620	4.2	10.2	11.2 2.38	5	61	37	22	25	10
يومه (او دور حركته حول محوره) (ساعة) .	607.5	2212	720	23.9 655	24.6	9.84	10.9	10.8	15.7	16
متوسط سرعته على مداره (كيلومتر/الثانية) .	—	48	35	29.8 1.02	24	13	9.65	6.8	5.44	4.75



الفصل الرابع

قانون التجاذب الكوني

- قانون التجاذب الكوني
- قوة جذب قضيب لجسيم على مستوى تناظره
- قوة جذب كرة جوفاء متجانسة لجسيم خارجها
- قوة جذب كرة جوفاء لجسيم داخلها
- قوة جذب كرة سميكة جوفاء لجسيم خارجها او داخلها
- قوة جذب كرة صماء لجسيم خارجها او داخلها
- قوة جذب حلقة دائرية منتظمة لجسيم على محورها
- قوة جذب قرص دائري متجانس لجسيم على محوره

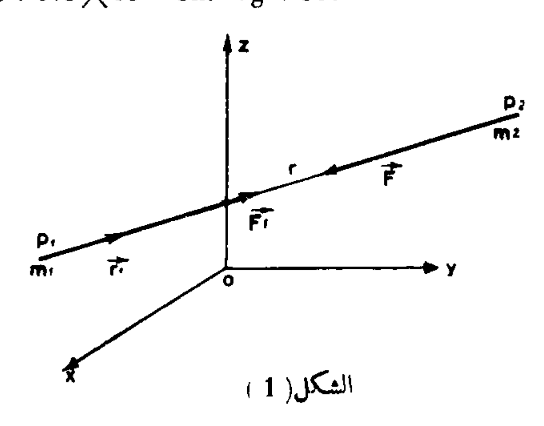
I — قانون التجاذب الكوني :

لقد درس نيوتن قوانين كبلير التي صاغها لدراسة حركة الكواكب ثم فسرها بقانونه الجديد في التجاذب الكوني . وينص هذا القانون على أن كل جسيمين ماديين يتجاذبان بقوة تتناسب طرداً مع كل من كتلتيهما وعكساً مع مربع المسافة بينهما . ويعبر عن القوة $\vec{F}$ التي يجذب بها الجسيم ذو الكتلة m_1 جسيماً آخر ذا كتلة m_2 بالعلاقة :

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{r_1} \qquad (1)$$

حيث r هو البعد بين الجسيمين و $\vec{r_1}$ شعاع واحدة المحور الموجه من الجسيم الأول (الجاذب) إلى الجسيم الثاني (المجذوب) ، وحيث G ثابت يسمى ثابت التجاذب الكوني وهو يعطى في الجملة السفثية (CGS) بالمقدار :

$$G = 6.673 \times 10^{-8}\ Cm^3 . g^{-1} . Sec^{-2} \qquad (2)$$



الشكل (1)

أما القوة التي يجذب الجسيمُ الثاني بها الجسيمَ الأول ، ولتكن $\vec{F}'$ ، فهي تعاكس مباشرة القوة الأولى $\vec{F}$ ، الشكل (1) أي :

$$\vec{F}' = -\vec{F} = G\frac{m_1\ m_2}{r^2}\vec{r_1} \qquad (3)$$

وقد افترضنا في ذلك أن المحور لا زال موجهاً من الجسيم الأول إلى الجسيم الثاني . أما إذا اصطلحنا على أن يكون التوجيه للمحور الذي يحمل القوة هو من الجسيم الجاذب نحو الجسيم المجذوب دائماً فان $\vec{F}$ و $\vec{F}'$ يعبر عنهما بعلاقة واحدة هي (1) .

لما كان شعاع الواحدة $\vec{r_1}$ يعطى بالعلاقة $\vec{r_1} = \vec{r} / r$ ، كما رأينا سابقاً ، فان اسقاط العلاقة (1) على المحاور الاحداثية ox , oy , oz يعطي مركبات القوة F_x و F_y و F_z على هذه المحاور . أي :

$$F_x = - G \frac{m_1 \ m_2}{r^3} \ x \qquad (4)$$

$$F_y = - G \frac{m_1 \ m_2}{r^3} \ y \qquad (5)$$

$$F_z = - G \frac{m_1 \ m_2}{r^3} \ z \qquad (6)$$

هذا ، ونلاحظ أن حقل التجاذب الكوني ، ويسمى كثيراً من الأحيان بالتجاذب النيوتني ، والمعبر عنه بالعلاقة (1) هو حقل مشتق من كمون .

$$V(r) = - \int_{\infty}^{r} f(r) \, dr = - G \ \frac{m_1 \ m_2}{r} \qquad (7)$$

والعلاقة الأساسية بين الحقل $\vec{F}$ والكمون الذي يشتق منه هذا الحقل :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= - \text{Grad} \, \vec{V} \, (r) \\ &= - \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \end{aligned} \qquad (8)$$

تأخذ الشكل التفصيلي :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = G \frac{m_1 \ m_2}{r^3} \ x = - F_x \qquad (9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = G \frac{m_1 \ m_2}{r^3} \ y = - F_y \qquad (10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = G \frac{m_1 \ m_2}{r^3} z = - F_z \qquad (11)$$

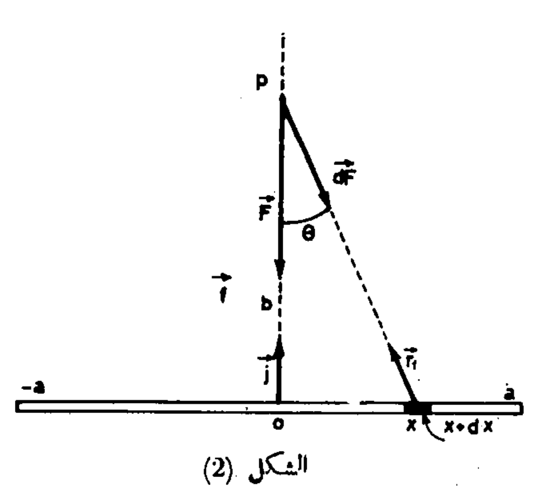
ان ما تقـدم قـد تناول قوة التجاذب بين جسيمين نقطيين . أما اذا كان الجسمان المتجاذبان غير نقطيين فان قوة التجاذب بينهما تحسب استناداً الى العلاقة (1) بحساب القوة المتبادلة بين عنصرين تفاضليين من الجسمين واجراء عمليـة تكامل شعاعيـة تشمل جميـع نقاط أو عناصر الجسمين المتجاذبين . وسنعالج فيما يلي بعض الحالات الهامة في حساب حقول جاذبية بعض الأجسام الهندسية .

II — قوة جذب قضيب رفيع لجسيم في مستوى تناظره:

ان القوة $\vec{dF}$ التي تؤثر في جسيم كتلته m والناتجة عن عنصر صغير من القضيب dx في جوار x ، انظر الشكل (2) ، هي :

$$d\vec{F} = -G\frac{m\sigma dx}{x^2 + b^2}\vec{r_1} \qquad (12)$$

وذلك بتطبيق قانون التجاذب الكوني المعطى بالعلاقة (1) ، حيث في العلاقة الأخيرة σ هي الكثافة الطولية للقضيب و σdx كتلة العنصر dx و $x^2 + b^2$ هو مربع البعد بين العنصر المذكور والجسيم P . وليس صعباً أن نرى أن القوة



الشكل (2)

الكلية $\vec{F}$ الناتجة عن هذا القضيب بكامله واقعة على محور التناظر OP الذي يبينه الشكل (2) وذلك بسبب التناظر . ولهذا السبب لا يهمنا الآن الا مركبة $d\vec{F}$ على ذلك المحور وهي :

$$\left(d\vec{F}\right)_y = -\ G\frac{m\,\sigma\,dx}{x^2+\ b^2}\cos\Theta$$

$$= -\ G\frac{m\,\sigma\,dx}{x^2+\ d^2}\ \frac{b}{\sqrt{x^2+\ b^2}} \qquad (13)$$

ونحصل على القوة الكلية $\vec{F}$ بتكامل العلاقة الأخيرة على طول القضيب آخذين بعين الاعتبار أن $\vec{F}$ محمولة على OP . هذا يعطي :

$$\vec{F} = F\vec{j} = \int_{-a}^{a} -G\,\frac{m\,\sigma\,b\,dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}\,\vec{j} \qquad (14)$$

وبانجاز عملية التكامل نجد :

$$\vec{F} = -\,G\,\frac{2\,m\,\sigma\,a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec{j} = -\,G\,\frac{m\,M}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec{j} \qquad (15)$$

حيث $M = 2\,a\,\sigma$ هي كتلة القضيب الذي طوله $2\,a$.

III - قوة جذب كرة جوفاء متجانسة لجسيم خارجها :

لنحسب الآن قوة الجذب التي تؤثر بها كرة مادية جوفاء متجانسة كثافتها السطحية σ على جسيم واقع خارج هذه الكرة على بعد b من مركزها . لنعتبر الاحداثيات الكروية (r,Θ,φ) ولنحسب القوة المؤثرة في الجسيم P والناتجة عن عنصر سطحي تفاضلي ds .

$$ds = R\ \sin\Theta\,d\,\varphi\,R\,d\,\Theta \qquad (16)$$

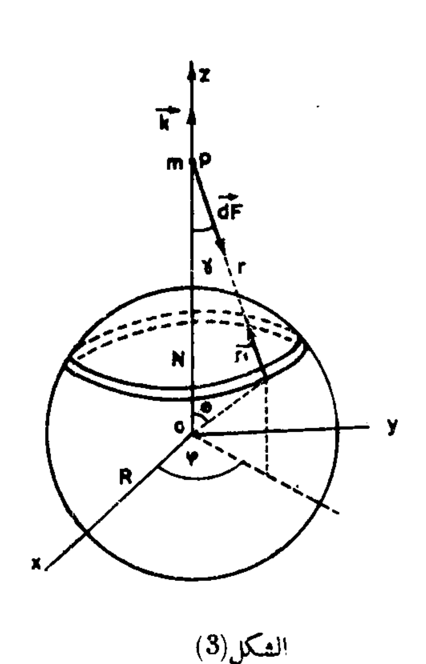
القوة الناتجة عن هذا العنصر هي :

$$d\vec{F} = -\,G\,\frac{m\,\sigma\,ds}{r^2}\,\vec{r_1} \qquad (17)$$

$$= -\,C\,\frac{m\,\sigma\,R^2\,\sin\Theta}{r^2}\,d\Theta\,d\varphi\,\vec{r_1}$$

فاذا كاملنا على المتحول الزاوي φ الذي يتحول بين O و 2π حصلنا

على القوة الناتجـة عن الحلقـة التي يمثلها الشكل (3). وهذه القوة محمولة عـلى OP بسبب التناظر . ولذلك فاننا نـكامل مسقط العلاقة الأخيرة على المحـور OP بدلاً منها ذاتهـا . هذا التـكامل يـؤدي الى ما يلي :



الشكل(3)

$$dF_1 = \int_{\varphi=o}^{2\pi} dF \cos\gamma$$

$$= -G\frac{2\pi m\sigma R^2 \sin\Theta}{r^2} d\Theta \cos\varphi \qquad (18)$$

أما القوة الكلية $\vec{F}$ المحمولة على OP أيضاً بسبب التناظر فنحصل عليها من تـكامل العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ Θ من o الى π .

$$\vec{F} = \int_{\Theta=o}^{\pi} dF_1 \vec{k} \qquad (19)$$

حيث k شعاع واحدة OP . وباستعمال (18) يكون :

$$\vec{F} = F\vec{k} = \int_{\Theta=o}^{\pi} -G\frac{2\pi m \sigma R^2 \sin\Theta\cos\gamma}{r^2} d\Theta \vec{k} \qquad (20)$$

لكن الشكل يبين أن :

$$r = \sqrt{R^2 + b^2 - 2R\, b \cos \Theta} \qquad (21)$$

$$\cos \gamma = \frac{b - R \cos \Theta}{r} \qquad (22)$$

$$= \frac{b - R \cos \Theta}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb \cos \Theta}} \qquad (23)$$

حيث R نصف قطر الكرة و b بعد الجسيم P عن مركز الكرة . واخيراً يؤدي استعمال (21) و (23) في (20) واجراء التكامل الى القوة المطلوبة حيث نجد :

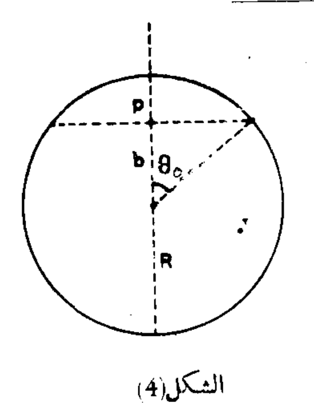
$$\vec{F} = - G \frac{4 \pi \sigma R^2 m}{b^2} \vec{k} \qquad (24)$$

$$= - G \frac{m M}{b^2} \vec{k} \qquad (25)$$

وتدلنا العلاقة (25) ، التي فيها $M = 4 \pi \sigma R^2$ كتلة الكرة ، على أن قوة جذب الكرة الجوفاء لجسيم خارجها تساوي القوة الناتجة فيما لو اعتبرنا كتلة الكرة متجمعة في مركزها . ولهذه النتيجة أهمية كبرى من الناحية التبسيطية .

IV — قوة جذب كرة جوفاء لجسيم داخلها :

لنفرض الآن أن الجسيم واقع داخل الكرة الجوفاء المتجانسة التي رأيناها في الفقرة الأخيرة . ولنستعمل الرموز السابقة ذاتها، كما يبين الشكل (4). لنأخذ المستوي المار من موضع الجسيم P متعامداً مع OP . هذا المستوي يقسم الكرة الى قبتين



الشكل(4)

العليا ، وتحاول جذب الجسيم بقوة نحو الأعلى، والسفلى وتحاول جذبه نحو

الأسفل . لهذا السبب يجب فصل التكامل السابق الى تكاملين الأول على القبة العليا من الكرة والثاني على القبة السفلى منها . أي :

$$\vec{F} = \int_{\Theta=0}^{\Theta_0} dF_1 \; \vec{k} + \int_{\Theta=\Theta_0}^{\Theta=\pi} dF_2 \; \vec{k} \qquad (26)$$

أما انجاز هذا التكامل فيترك كتمرين وتؤدي نتيجته الى أن القوة $\vec{F}$ معدومة.

$$\vec{F} = 0 \qquad (27)$$

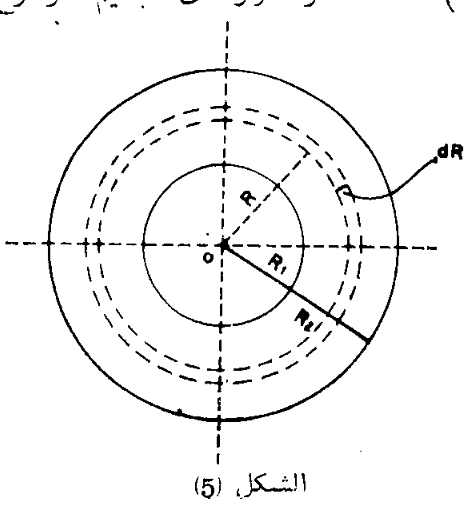
فالجسيم داخل الكرة الجوفاء المتجانسة لا يخضع لقوة جاذبة ناتجة عن هذه الكرة.

V — قوة جذب كرة سميكة جوفاء لجسيم خارجها او داخلها :

اذا كانت الكرة الجوفاء سميكة وكان نصفا قطريها الداخلي والخارجي هما R_1 و R_2 بالترتيب فان الحصول على قوة جذب هذه الكرة المتجانسة يتم بأن نأخذ أولاً القوة $d\vec{F}$ الناتجة عن قشرة كروية نصف قطرها R وسمكها dR ونكامل بين $R = R_1$ و $R = R_2$ ، أي أننا نعتمد على نتيجتي الفقرتين السابقتين . ان القوة الناتجة عن القشرة الكروية المذكورة هي:

$$d\vec{F} = -G \frac{4m\pi R^2 \sigma dR}{b^2} \vec{k} \qquad (28)$$

حيث σ هي الكثافة الحجمية وحيث $4\pi R^2 dR$ تمثل حجم هذه القشرة . انظر الشكل (5) . هذه القوة تؤثر على الجسيم الموضوع خارج الكرة



الشكل (5)

($R_2 < b$) . ونحصل بالتكامل على القوة :

$$\vec{F} = \int_{R=R_1}^{R=R_2} - G \frac{4m \pi R^2 \ \sigma \ dR}{b^2} = - \left[\frac{G \frac{4}{3} \pi R^3 \ \sigma \ m}{b^2} \right]_{R_1}^{R_2} \vec{k}$$

$$= - G \ \frac{\frac{4}{3} \pi \left(R_2^3 - R_1^3 \right) \sigma \ m}{b^2} \vec{k}$$

$$= - G \ \frac{m \ M}{b^2} \ \vec{k} \quad , \quad R_2 < b \qquad (29)$$

ونجد هنا أيضاً أن قوة جذب الكرة لجسيم خارجها تساوي قوة جذب كتلة هذه الكرة فيما لو وضعت كلها في مركزها .

أما اذا وقع الجسيم داخل هذه الكرة السميكة أي ($R_1 > O$) فليس من الصعب أن نرى أن القوة الناتجة عن هذه الكرة معدومة لأن كل قشرة كروية لا تؤثر على الجسيم الذي تحتويه في داخلها . والتكامل لا يغير هذه الحقيقة أي أن :

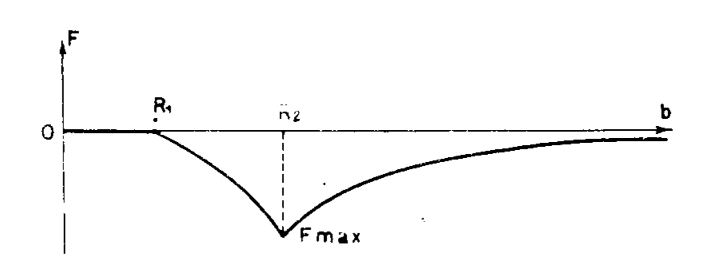
$$\vec{F} = O \quad و \quad R_1 > b \qquad (30)$$

وأخيراً ، اذا وقع الجسيم ضمن الكرة السميكة ($R_2 > b > R_1$) فان الجسيم لا يخضع لجذب من قبل الجزء الخارجي من الكرة بالنسبة لهذا الجسيم أي من أجل $R > b$ ولذلك فان التكامل الذي يعطي القوة الكلية يمتد بين $R = R_1$ و $R = b$. اذاً :

$$\vec{F} = \int_{R=R_1}^{R=b} - G \frac{4m \pi R^2 \ \sigma \ dR}{b^2} \ \vec{k}$$

$$= - G \left[\frac{\frac{4}{3} \ m \ \pi R^3 \ \sigma}{b^2} \right]_{R_1}^{b} \vec{k}$$

$$= - G \ \frac{4 \ \pi \left(b^3 - R_1^3 \right) \sigma \ m}{3 \ b^2} \vec{k} \quad . \quad R_2 > b > R_1 \qquad (31)$$



الشكل (6)

ويمثل الشكل (6) تحولات القوة الجاذبة عندما ينتقل الجسيم من مركز الكرة ثم يخرج منها مبتعداً الى اللانهاية . تبقى القوة معدومة ما دام الجسيم داخل الكرة الداخلية ($b < R_1$) . تزداد بعد ذلك متأثرة بعاملين هما ازدياد الكتلة (يزيد القوة) وازدياد البعد (ينقصها) لاحظ الحدين $- G \frac{4\pi\sigma m\ b^3}{3\ b^2}$ وهو خطي في b و $G \frac{4\pi\sigma m\ R_1^3}{b^2}$ المتناسب عكساً مع مربع البعد . لكن الحد الأول أكبر بقيمته المطلقة مما يؤدي الى التغير المشاهد بين R_1 و R_2 حيث تبلغ شدة القوة قيمتها العظمى :

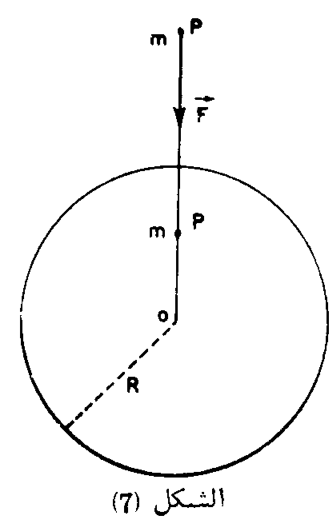
$$F_{max} = - G \frac{mM}{b^2}$$

حين يكون الجسيم في R_2 . بعد ذلك تعود القوة الى التناقص بالقيمة المطلقة الى أن تنعدم عندما يصبح الجسيم في اللانهاية .

VI — قوة جذب كرة صماء لجسيم خارجها او داخلها :

يمكننا أن نستنتج قوة الجذب في هذه الحالة من الحالة السابقة للكرة

للجوفاء السميكة . فالمقابلة بين الحالتين تبين أن $R_1 = O$ في الحالة الجديدة . ولدينا عندئذ حالتان فقط : في الأولى يكون $b < R$ وفي الثانية $b > R$ ، حيث $R = R_2$ هو نصف قطر الكرة الصماء . و b بعد الجسيم عن مركز الكرة . ففي الحالة الأولى ، نستنتج من تطبيق المعادلة (31) أن :



الشكل (7)

$$F = -G \frac{4 \pi m \sigma b^3}{3 b^2} \vec{k} \quad , \quad b<R$$

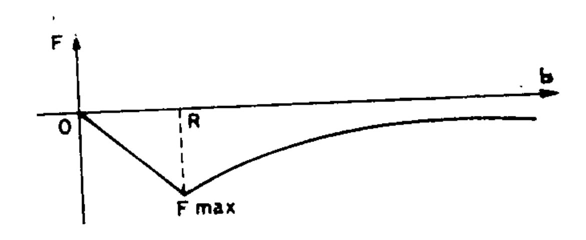
أو :

$$F = - \frac{4}{3} G\pi m\sigma b \vec{k} \qquad (32)$$

وهي حالة جسيم داخل الكرة . أما في حالة وقوع الجسيم خارج الكرة فيقودنا تطبيق العلاقة (29) الى العبارة :

$$F = -G \frac{mM}{b^2} \vec{k} \quad , \; b > R \qquad (33)$$

تدل العلاقة (32) على أن قوة الجاذبية داخل الكرة تتناسب طرداً مع بعد الجسيم عن مركز الكرة . ولذلك فان القوة F تتحول تحولاً خطياً بين المركز والسطح ، كما يمثل الشكل (8) . أما خارج الكرة فان القوة

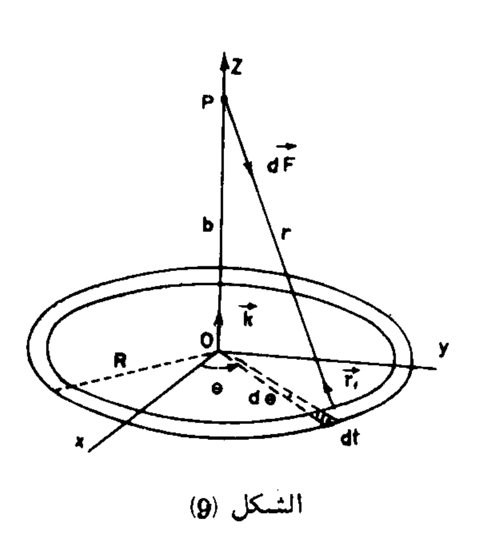


الشكل (8)

تتناسب عكساً مع مربع ذلك البعد .

VII – قوة جذب حلقة دائرية منتظمة لجسيم على محورها :

لنعتبر حلقة مادية دائرية نصف قطرها R وكثافتها الخطية σ كالتي يمثلها الشكل (9) . ان القوة $d\vec{F}$ الناتجة عن عنصر خطي $dl = R d\Theta$ والتي تجذب جسيماً واقعاً على محور الحلقة هي :



الشكل (9)

$$d\vec{F} = -G\frac{m\sigma R\, d\Theta}{r^2}\vec{r}_1 \qquad (34)$$

ولما كانت القوة الجاذبة الكلية $\vec{F}$ محمولة على محور الحلقة بسبب تناظر هذه الحلقة فلا يهمنا الا المركبة على هذا المحور للقوة $d\vec{F}$.
فبالاسقاط عليه ومكاملة مسقط $d\vec{F}$ نجد :

$$\vec{F} = \int_{\Theta=o}^{2\pi} - G \frac{m \sigma R d \Theta}{r^2} \cos \gamma \vec{k} \quad (35)$$

$$= \int_{\Theta=o}^{2\pi} - G \frac{m \sigma R d \Theta}{r^2} \frac{b}{r} \vec{k}$$

$$= - G \frac{m (2\pi R \sigma) b}{r^3} \vec{k}$$

$$= - G \frac{m M b}{(R^2 + b^2)^{3/2}} \vec{k} \quad (36)$$

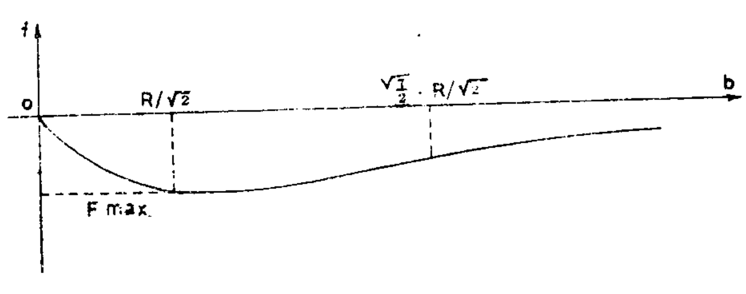
لمعرفة كيف تتحول قوة الجذب هذه بتحول البعد b يلاحظ أن مشتق القيمة الجبرية للقوة هو :

$$F' = -(GmM)\left[(b^2 + R^2)^{-3/2} - 3b^2 (b^2 + R^2)^{-5/2} \right] \quad (37)$$

أما المشتق الثاني فهو :

$$F'' = -(G m M) b (b^2 + R^2)^{-7/2} (7R^2 - 8b^2) \quad (28)$$

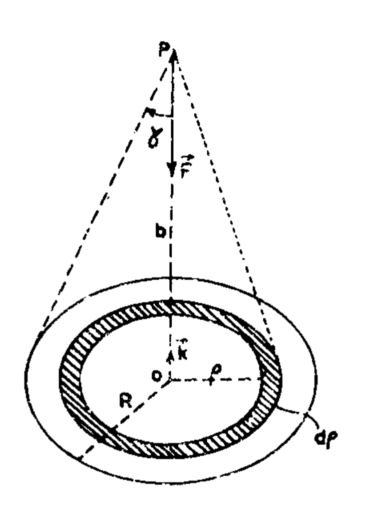
ينعدم المشتق الأول عندما $b = R / \sqrt{2}$ حيث تبلغ F قيمتها الدنيا (قيمتها العظمى المطلقة) ، كما يبين الشكل (10) . أما المشتق الثاني فينعدم عندما $b = \frac{\sqrt{7}}{2} R / \sqrt{2}$ ويكون موجباً من أجل $b < \frac{\sqrt{7}}{2} R / \sqrt{2}$ دالاً على أن F يتقعر منحنيها نحو الاعلى . كما ان المشتق الثاني يكون سالباً من أجل $b > \frac{\sqrt{7}}{2} R / \sqrt{2}$ أي أن منحني F يتحدب نحو الاعلى كما يتضح في الشكل (10) . وتنحدر القوة نحو الصفر عندما يتعد الجسيم نحو اللانهاية .



الشكل (10)

VIII – قوة جذب قرص دائري متجانس لجسيم على محوره :

نستخلص هذه الحالة من سابقتها ، حالة الحلقة ، وذلك بأخذ حلقة عنصرية من القرص نصف قطرها ρ وعرضها $d\rho$ ، كما يبين الشكل (11). القوة الناتجة عن هذه الحلقة محمولة على محور التناظر وتساوي :



الشكل (11)

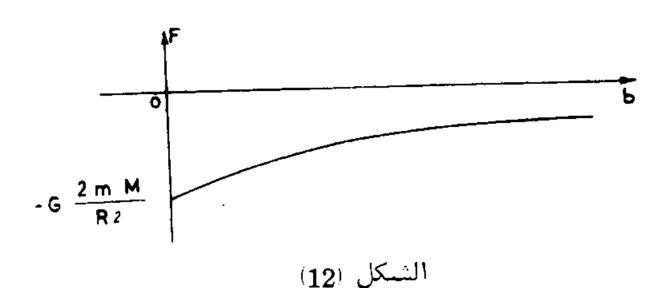
$$d\vec{F} = -G\frac{m\left(2\pi\sigma\varrho d\varrho\right)b}{\left(\varrho^2+b^2\right)^{3/2}} \qquad (39)$$

وبتكامل العبارة (39) بين $\varrho = o$ و $R = \varrho$ نجد :

$$\vec{F} = -2\pi\sigma m G b\int_{\varrho=o}^{\varrho=R}\frac{\varrho d\varrho}{(\varrho^2+d^2)^{3/2}}\vec{k} \qquad (40)$$

$$\vec{F} = -G\frac{2mM}{R^2}\left[1-\frac{b}{\sqrt{b^2+R^2}}\right]\vec{k} \qquad (41)$$

وبدراسة F ومشتقاتها نجد أنها تتحول كما يبين الشكل (12) . وتكون شدة القوة عظمى عندما يكون الجسم على القرص ثم تتناقص على النحو المبين .



الشكل (12)

* * *

الفصل الخامس

حركة الجسيم المشحون في حقل كهرطيسي

- حركة جسيم مشحون في حقل كهربائي
- حركة جسيم مشحون في حقل مغناطيسي منتظم
- مطياف الطاقة ومطياف الكتلة
- المسرعات الرحوية
- حركة جسيم مشحون تحت تأثير حقلين كهربائي ومغناطيسي

إن القوانين التي تعين الحقول الكهربائية والمغناطيسية الناتجة عن توزعات مختلفة للشحنات الكهربائية والتيارات الكهربائية هي من موضوعات النظرية الكهرطيسية . أما حركة الجسيمات المشحونة تحت تأثير قوى كهربائية ومغناطيسية فهي مسألة ميكانيكية يجدر بنا أن نعالجها هنا .

لتكن q و $\vec{r}$ شحنة وشعاع موضع جسيم متحرك في حقل كهربائي $\vec{E}$. من المعروف أن هذا الجسيم يخضع لقوة كهربائية (قوة ناشئة عن الحقل الكهربائي) معطاة بالعلاقة :

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \qquad (1)$$

حيث يتبع الحقل $\vec{E}$ بصورة عامة للموضع والزمن .

واذا وقع الجسيم في حقل مغناطيسي تحريضه $\vec{H}$ (تابع للموضع والزمن بصورة عامة) فانه يخضع عندئذ لتأثير قوة مغناطيسية (ناشئة عن الحقل المغناطيسي) تعطى بالعلاقة :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{H} \qquad (2)$$

حيث $\vec{v}$ سرعة الجسيم . وقد كتبنا العلاقتين الاخيرتين في الجملة العملية MKSA .

فاذا اعتبرنا الجسيم المشحون واقعاً تحت تأثير حقلين كهربائي ومغناطيسي ، بالاضافة الى حقل الجاذبية الارضية،فان القوة الكلية التي يخضع لها اثناء حركته هي :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m + \vec{F}_g = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{H} + m\vec{g} \qquad (3)$$

حيث $\vec{g}$ هو تسارع الجاذبية الأرضية . في كثير من الاحيان يكون الجسيم خاضعاً لبعض هذه القوى فقط او تكون بعضها صغيرة مهملة الى جانب الاخرى . وسندرس هنا بعض الحالات الخاصة لاهمية نتائجها وطرق معالجتها .

I — حركة جسيم مشحون في حقل كهربائي :

سبق أن ذكرنا ان الحقل الكهربائي الذي يخضع له الجسيم هو تابع للزمن ولموضع الجسيم بصورة عامة . فدراسة حركة الجسيم تتطلب معرفة تامة ومسبقة للحقل . ولما كانت تابعية الحقل للمكان والزمان يمكن ان تأخذ اشكالاً عديدة ، وذلك حسب نوعية السبب المؤدي الى وجوده ، فليس بامكاننا ان نتعرض لجميع انواع الحقول الممكنة وان نتناول دراسة حركة الجسيم فيها ، ونكتفي لذلك بالملاحظة التالية . اذا كان الحقل منتظماً فان حركة الجسيم المشحون فيه شبيهة تماماً بدراسة حركة القذائف . واما اذا كان الحقل مركزياً انطبقت عليه الدراسة التي اتينا عليها خلال الفصل الثالث ، وليس من الضروري عندئذ ان نعيد ما قيل من قبل .

II — حركة جسيم مشحون في حقل مغناطيسي منتظم :

نختار جملة المحاور الاحداثية هنا بحيث يكون محورها oz موازياً للحقل المغناطيسي $\vec{H}$ ، ونهمل تأثير حقل الجاذبية الارضية للتبسيط . نستطيع الآن ايجاد معادلات حركة الجسيم منطلقين من قانون نيوتن الثاني ، آخذين بعين الاعتبار ان القوة المؤثرة على الجسيم هي المعطاة بالعلاقة (2) وهي متعامدة مع المحور oz . نكتب اذاً :

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = q\vec{v} \wedge \vec{H} = qH\vec{v} \wedge \vec{k} \qquad (4)$$

باسقاط هذه العلاقة على المحاور الاحداثية نحصل على المعادلات التفاضلية للحركة :

$$\begin{aligned} m\,x'' &= q H y' \qquad & x'' - \omega y' &= 0 \\ m\,y'' &= -q H x' \qquad & y'' + \omega x' &= 0 \\ m\,z'' &= 0 \qquad & z'' &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

حيث $\omega = qH / m$.

تبين العلاقة الاخيرة من (5) ان حركة مسقط الجسيم على المحور oz (الموازي للحقل المغناطيسي) هي حركة منتظمة سرعتها v_z ثابتة تتعين من شروط البدء . لاتمام دراسة الحركة يكفي ان ندرس حركة المسقط على المستوى oxy . نضرب العلاقتين الاوليين من (5) بـ x' ، y' على الترتيب ثم جمعها نجد :

$$x' x'' + y' y'' = 0 \qquad (6)$$

وتعطى مكاملة هذه العلاقة :

$$x'^2 + y'^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_{xy}^2 = Cte \qquad (7)$$

اي ان السرعة الخطية لمسقط الجسيم على المستوى oxy ثابتة الطويلة . واذا ربعنا العلاقتين المذكورتين من (5) وجمعنا الناتج لوجدنا ان :

$$x''^2 + y''^2 = a_x^2 + a_y^2 = \omega^2 v_{xy}^2 = Cte \qquad (8)$$

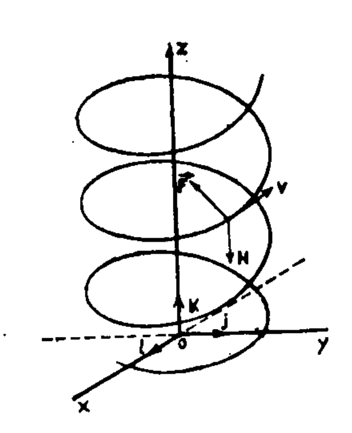
اي ان تسارع المسقط ثابت الطويلة ايضاً . واخيراً ، اذا كاملنا العلاقتين مرة واحدة وجدنا :

$$x' = \omega y + C_1 \quad و \quad y' = -\omega x + C_2$$

وباختيار مناسب لشروط البدء يمكن جعل ثابتي التكامل C_1 ، C_2 معدومين . وعندئذ وبتربيع وجمع هاتين العلاقتين نجد :

$$x^2 + y^2 = \varrho_{xy}^2 = v_{xy}^2 / \omega^2 \qquad (9)$$

ونلاحـظ الآن من العلاقات (7) ، (8) ، (9) أن مسقط الجسيم على المستوى oxy يرسم دائرة بسرعة خطيـة ثابتة وتسارع مركزي ثابت الطويلة . فالحركة هذه هي إذاً دائرية منتظمة .



الشكل (1)

والآن وباعتبار حركتي المسقطين على المحور oy والمستوى oxy بنفس الوقت يتبين لنا أن الجسيم يتحرك كما في الشكل (1) ، على لولب اسطواني ثابت الخطوة ، ونصف قطر اسطوانته حسب العلاقة الاخيرة هو :

$$\varrho_{xy} = v_{xy} / \omega = mv_{xy} / qH \qquad (10)$$

فاذا كانت مركبة السرعة v_z على المحور oz الموازي للحقل المغناطيسي معدومة في لحظة البدء كانت حركة الجسيم دائرية في المستوى oxy ، او في مستو يوازيه ، وذلك حسب شروط البدء . وعندئذ تكون $v_y = v$ ، $\varrho_{xy} = \varrho$ وتأخذ العلاقة الأخيرة الشكل :

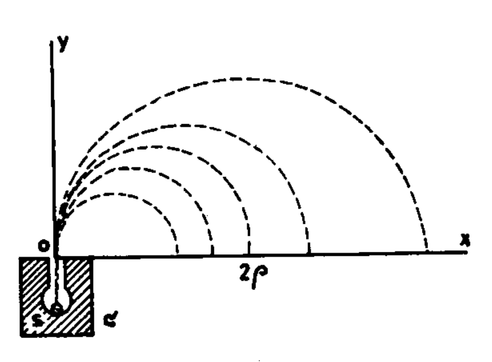
$$\varrho = v / \omega = m\, v / qH = p / qH \qquad (11)$$

حيث p هو الاندفاع الخطي للجسيم .

هذه العلاقة المهمة تربط بين الحقل وسرعة الجسيم وكتلته وشحنته ونصف قطر مساره الدائري . ولهذه العلاقة أهمية كبرى في المجالات العملية التجريبية للفيزياء . ونبين فيما يلي كيف نستعمل هذه العلاقة في تطبيقين هامين.

III – مطياف الطاقة ومطياف الكتل :

ليكن S منبعاً لجسيمات مشحونة ، كالشوارد الغازية الموجبة ، أو جزئيات بيتا ذات الشحنات السالبة ، موضوعاً في بوتقة رصاصية C ذات فوهة ضيقة ، كما يبين الشكل (2) . ان العنصر المشع S يطلق بنفس الوقت جسيمات بيتا (مثلاً) ذات كتل متساوية وطاقات حركية مختلفة (أي سرع مختلفة) تتدرج من الصفر حتى قيمة عظمى . ونود الآن استعمال الفكرة التي توصلنا إليها في الدراسة السابقة لمعرفة كيفية توزع هذه الجسيمات المشحونة بحسب طاقاتها . وبعبارة أخرى إذا كان N(v) العدد النسبي



الشكل (2)

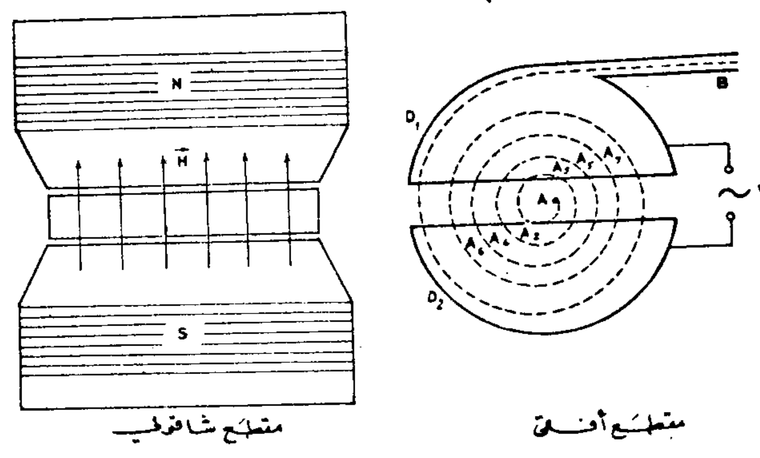
للجسيمات ذات السرعة v ، فاننا نرغب في معرفة تغيرات N بدلالة v .
يتبين من الشكل (2) ان جدران البوتقة تمتص جميع الجسيمات التي تصطدم بها ولا تسمح بالمرور إلا للجسيمات ذات السرع المتجهة باتجاه oy تقريباً . فاذا طبقنا الآن حقلاً مغناطيسياً منتظماً متعامداً مع المستوى oxy فان الجسيمات المشحونة عندئذ تتحرك على مسارات دائرية بالسرعة التي خرجت بها من الفوهة 0 . وتختلف أنصاف أقطار هذه الدوائر باختلاف سرعتها ، فاذا وضعنا على طول المحور ox صفيحة حساسة للجسيمات (كفيلم تصوير مثلاً) فان مقدار تأثر الصفيحة في مكان ما يتناسب مع عدد الجسيمات التي سقطت على الصفيحة في ذلك المكان . بقياس القوة النسبية لتأثر الصفيحة نحصل على التوزع النسبي للجسيمات بدلالة أقطار مساراتها (أو انصاف اقطارها) التي ترتبط بالسرعة وفق العلاقة (11). فالقوة النسبية لتأثر الصفيحة هي تعبير غير مباشر لتوزع الجسيمات حسب سرعها وبالتالي حسب طاقاتها الحركية . ويسمى هذا الجهاز بمطياف الطاقة .

نلاحظ من العلاقة (11) أنه بامكاننا دراسة توزع الجسيمات النسبي حسب كتلها (فيما لو كانت مختلفة الكتل ومتساوية السرع) . ويمكن في في هذه الحالة تسمية الجهاز بمطياف الكتل . ويجدر بالذكر أنه يمكن الاستعاضة عن الصفيحة الحساسة بكاشف للجسيمات المشحونة (كأنبوب غايغر مثلها) يمكن أن ينزلق على المحور ox . وفي هذه الحالة نستعمله في مواضع مختلفة على هذا المحور ولفترات متساوية في جميع المواضع ، فيعد لنا العدد النسبي للجسيمات . كما يجدر بنا أيضاً أن نلاحظ أن الجسيمات تنحرف نحو اليسار وتسقط على الجزء الأيسر من ox وذلك فيما اذا كانت شحناتها موجبة ، أي مخالفة لما اعتبرناه فيما أتينا على ذكره من هذه الدراسة . والحالة الجديدة تنطبق على جسيمات ألفا (α) الموجبة وعلى البروتونات الموجبة أيضاً .

IV - المسرعات الرحوية :

يمكن الآن أن ننتقل إلى تطبيق آخر للمعادلة (11) . وفيه نتناول مبدأ المسرع الرحوي أو السيكلوترون . ويتألف السيكلوترون من صندوقين معدنيين D_1 و D_2 لكل منهما شكل حرف D كما يبين الشكل (3) . نطبق على الصندوقين حقلا مغناطيسياً H منتظماً بواسطة مغناطيس كهربائي .

إن الحقل المغناطيسيّ منتظم في الفراغ الذي يشغله الصندوقان وفي الفجوة بينهما ومعدوم خارج هذا المجال . يطبق فرق كمون كهربائي متناوب V بين الصندوقين. ولذلك يكون الحقل الكهربائي بين D_1 و D_2 متناوباً أيضاً وله نفس تواتر فرق الكمون V . أما الحقل الكهربائي داخل كل من الصندوقين فهو معدوم تقريباً لاعتبار الصندوقين مغلقين تقريباً (باستثناء الفتحتين المتقابلتين) .



الشكل (3)

ليكن A منبعاً لجسيمات مشحونة ولنتتبع مسار أحد هذه الجسيمات. فلما كان الجسيم خاضعاً للحقل المغناطيسي $\vec{H}$ فانه يتحرك على دائرة نصف قطرها معطى بالعلاقة (11) ولولا وجود الحقل الكهربائي بين الصندوقين D_1 ، D_2 لكانت حركة الجسيم منتظمة على دائرة ذات قطر ثابت. إلا أنه عملياً لا يستمر بهذا الشكل. فعندما يصل الجسيم الى الوضع A_2 يكون الصندوق D_1 موجباً و D_2 سالباً وبالتالي فالحقل بينهما يتجه من D_2 إلى D_1. ولذلك فهو يتسارع اثناء مروره بين الصندوقين فتزداد سرعته وبالتالي يزداد نصف قطر مساره ، انظر المعادلة (11) . فاذا وصل الجسيم إلى الوضع A_3 يكون الحقل الكهربائي قد تغير بين الصندوقين بحيث يصبح متجهاً من D_1 إلى D_2 وكذلك القوة المؤثرة على الجسيم تتجه بنفس الاتجاه وبالتالي فان الجسيم يتسارع من جديد لدى مروره بين الصندوقين. وعندئذ يدخل الصندوق الثاني بسرعة أكبر. ولذلك فانه يرسم في الصندوق D_2 نصف دائرة أكبر من تلك التي رسمها في الصندوق D_1. وعندما يصل الموضع A_4 ينقلب اتجاه الحقل من جديد فيعاود الجسيم الكرة من جديد فيتسارع ويرسم نصف دائرة أكبر وهكذا ... ففي كل مرة يمر الجسيم بين الصندوقين تزداد سرعته ويكبر نصف قطر مساره. فهو اذاً يرسم مساراً لولبياً تقريباً . وبعد عدد كبير من الدورات يصبح نصف قطر المسار أكبر من نصف قطر الصندوق ويضطر الجسيم عندئذ الى مغادرة الصندوق من فتحة B صممت لهذا الغرض . فاذا ما خرج الجسيم من B أصبح حالاً غير خاضع للحقل المغناطيسي وبالتالي يتابع مسيرته وفق خط مستقيم ، بعد ان تكون سرعته قد ازدادت بعد دورانه داخل السيكلوترون . فالسيكلوترون اذاً يسرع الجسيمات المشحونة على النحو السابق .

بقي الآن ان نلاحظ وجوب تواقت تناوب الحقل الكهربائي مع وصول

الجسيم الى A_2 ، A_3 ، A_4 .... ويخيل الينا لأول وهلة ان الفترات الزمنية التي يستغرقها الجسيم بين هذه الرؤوس هي فترات غير متساوية مما يجعل تواقت الحقل الكهربائي امراً شاقاً . ولكن هذا خلاف الواقع لأن السرعة الزاوية للجسيم هي :

$$\omega = v/\varrho = qH/m \qquad (12)$$

وهي ثابتة لأن q ، H ، m ثابتة كلها . فالزمن اللازم لقطع المسافة بين اي موضعين متتاليين A_2 ، A_3 مثلاً ثابت ويساوي نصف الدور .

$$\tau = \frac{T}{2} = 2\pi / 2\omega = \pi / \omega = \pi m / qH \qquad (13)$$

ولذلك فان فترات تناوب فرق الكمون V ، وبالتالي الحقل الكهربائي ، متساوية . ولهذا فان هذا التناوب يتم بشكل بسيط لا صعوبة فيه .

V — حركة جسيم مشحون تحت تاثير حقلين كهربائي ومغناطيسي :

ليكن الجسيم خاضعاً لتأثير حقلين منتظمين الاول مغناطيسي والثاني كهربائي. ولنختر جملة الاحداثيات بحيث يكون الحقل المغناطيسي موازياً للمحور oz والحقل الكهربائي موازياً للمستوى oxy كما يبين الشكل(4). اي :

$$\vec{H} = H\vec{k} \text{ و } \vec{E} = E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \qquad (14)$$

باتباع طريقة الفقرة السابقة نفسها نجد ان معادلات الحركة هي

$$mx'' = qHy' \qquad (15)$$

$$my'' = -qHx' + qE_y \qquad (16)$$

$$mz'' = qE_z \qquad (17)$$

بقسمة هذه المعادلات على m تصبح :

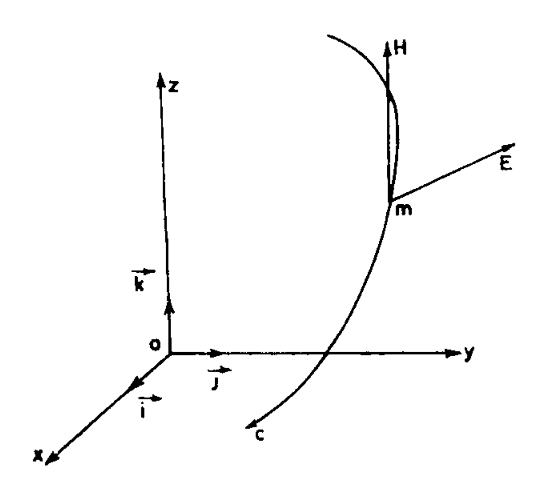
$$x'' - \omega y' = 0 \qquad (18)$$

$$y'' + \omega x' = a \qquad (19)$$

$$z'' = b \qquad (20)$$

حيث :

$$\omega = qH/m \quad , \quad a = qE_y / m \quad , \quad b = qE_z /m \qquad (21)$$



الشكل (4)

بمكاملة العلاقة (20) مرتين متتاليتين وتطبيق شروط البدء نجد ان حركة مسقط الجسيم على oz متسارعة بانتظام حيث يعطى موضع المسقط بالعلاقة :

$$z = z_0 + z_0 t + \frac{1}{2} bt^2 \qquad (22)$$

اما حل المعادلتين (18) ، (19) فيعطي حركة المسقط على المستوى oxy . وللحل نشتق الأولى منها ونعوض في الثانية ونشتق الثانية ونعوض في الأولى فنجد :

$$x''' + \omega^2 x' = a \qquad (23)$$

$$y''' + \omega^2 y' = o \qquad (24)$$

وحل هاتين المعادلتين بالنسبة لـ y' و x' يعطي :

$$x' = A_x \cos\left(\omega t + \Theta_x\right) + a/\omega \qquad (25)$$

$$y' = A_y \cos\left(\omega t + \Theta_y\right) \qquad (26)$$

فاذا كاملناهما حصلنا على معادلتي الحركة الجبريتين :

$$x = \frac{A_x}{\omega} \sin\left(\omega t + \Theta_x\right) + (a/\omega)t + C_x \qquad (27)$$

$$y = \frac{A_y}{\omega} \sin\left(\omega t + \Theta_y\right) + C_y \qquad (28)$$

حيث A_x ، A_y ، Θ_x ، Θ_y ، C_x و C_y مجموعة ثوابت يجب تعيينها . ولعلنا نلاحظ هنا بعض الصعوبة في تعيينها من شروط البدء وهي أربعة x_0 و y_0 و x'_0 و y'_0 . وهذه الشروط كافية لتعيين أربعة ثوابت فقط ، وعلينا ان نفتش عن علاقتين بين الثوابت الستة حتى يمكن التعيين بشكل تام . ان (27) و (28) هما حلا المعادلتين (23) و(24) من المرتبة الثالثة ولذا فان هناك ثلاثة ثوابت تكامل لكل منها . ولقد نتجت معادلتا المرتبة الثالثة من اشتقاق معادلتي المرتبة الثانية للحركة أي من (18) و (19) . فهاتان المجموعتان إذن غير متكافئتين . والحلان (27) و (28) غير مقبولين الا إذا حققا المعادلتين الأصليتين . لذلك نعوض من المعادلتين (الاصليتين) (27) و (28) في المعادلتين (18) و (19) اللتين يجب أن تتحققا دوماً . فاذا قمنا بهذا التعويض وقسمنا إحدى المعادلتين الناتجتين على الأخرى نتجت لدينا العلاقتان :

$$A_y = A_x = 1 \qquad (29)$$

$$\operatorname{tg}\left(\omega t + \Theta_y\right) = -\operatorname{cotg}\left(\omega t + \Theta_x\right) \qquad (30)$$

أي ان :

$$\Theta_y = \Theta_x + \frac{\pi}{2} = \Theta + \frac{\pi}{2} \quad , \quad \Theta_x = \Theta \qquad (31)$$

ويصبح الحلان x و y بالشكل :

$$x = \left(A/\omega\right)\sin(\omega t + \Theta) + \frac{a}{\omega} t + Cx \qquad (32)$$

$$y = \left(A/\omega\right)\cos(\omega t + \Theta) + Cy \qquad (33)$$

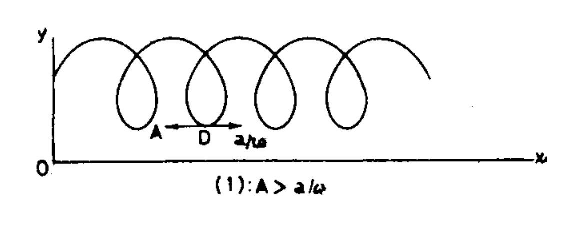
حيث في هاتين العلاقتين اربعة ثوابت فقط هي A ، Θ ، C_x ، C_y يمكن تعيينها بسهولة من شروط البدء .

لمعرفة شكل المسار في المستوي oxy نقول إنه لو كانت $E_y = o$ فان $a = o$ وعندئذ تصبح الحركة منتظمة على دائرة مركزها (C_x ، C_y) ونصف قطرها A/ω . وهذه الحالة مشابهة لما ورد في الدراسة السابقة ، اي في حالة حقل مغناطيسي فقط .

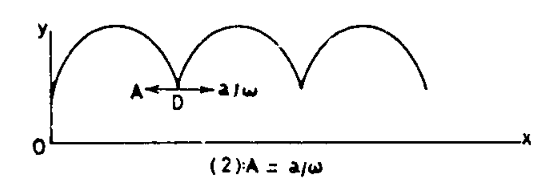
اذن فتأثير مركبة الحقل E_y يتمثل بالحد $(a/\omega)t$ في المعادلة (32) الذي يضيف إلى حركة المسقط حركة انسحابية منتظمة باتجاه المحور ox . والشكل (5) يمثل شكل المسار في المستوى oxy حسب قيمة E_y .

وليس من الصعب أن نرى من المعادلتين (32) ، (33) ان المسقط على oxy يتحرك على دائرة نصف قطرها A/ω بسرعة تساوي A في حين تنسحب هذه الدائرة باتجاه ox بسرعة تساوي a/ω .

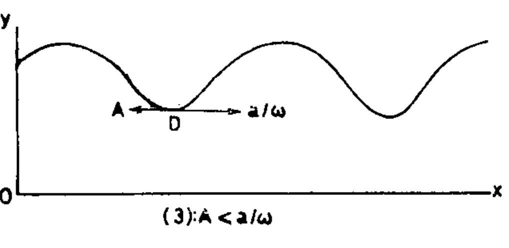
فاذا اعتبرنا أقرب مواضع المسقط من المحور ox ، كالنقطة D مثلاً فان من السهولة بمكان أن نرى أن للنقطة D سرعتين متعاكستين بالاتجاه الأولى هي السرعة A الناتجة عن الدوران على الدائرة وتتجه نحو اليسار



(1): A > a/ω



(2): A = a/ω



(3): A < a/ω

الشكل (5)

من هذا الموضع والثانية هي السرعة الانسحابيـة $a/\omega = E_y/H$ المتجهة نحو اليمين . ونستطيع أن نميز بين الحالات التالية :

أولاً : إذا كان $A > a/\omega$ كان للنقطة D (المسقط) حركة تراجعية والمسار هو من النمط (1) من الشكل (5) .

ثانياً : وإذا كان $A = a/\omega$ فان النقطة D تكون ساكنة في هذا الموضع وللمسار ذروة عندئذ وهي من النمط (2).

ثالثاً : وأخيراً إذا كان $A < a/\omega$ ب محصلة سر D نحو اليمين في هذه الحالة والمسار من النمط (3) .



الفصل السادس

الجمل اللاعطاليـــة

- الجملة اللاعطاليـــة
- الجمل الدوارة
- فاعل الاشتقاق الاول
- المشتق الثاني لشعاع في الجملتين المتحركة والثابتة
- فاعل الاشتقاق الثاني
- السرعة والتسارع
- الجمل المتحركة بصورة عامة
- حركة نقطة مادية حول الارض
- نواس فوكو



I . الجملة اللاعطالية :

عرفنا فيما سبق الجملة العطالية بانها تلك التي تتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة للفراغ . أما الجملة التي لا تحقق هذا الشرط فهي جملة لاعطالية كالجمل ذات السرعة المتغيرة أو الجمل التي يرافق حركتها دوران. فاذا اعتبرنا جملة متماسكة مع الآرض كانت هذه الجملة لاعطالية لأن الأرض نفسها تدور في الفضاء . ولقد رأينا سابقاً أن المبادىء الأساسية للميكانيك، وهي قوانين نيوتن ، لا تصح إلا في الجمل العطالية . ولذلك فان استعمال هذه القوانين في جمل لا عطالية كالأرض يقودنا إلى نتائج خاطئة . وإذا كنا نفعل ذلك في بعض الأحيان تكون النتائج عندئذ تقريبية . وسنرى في هذا الفصل كيف تتم دراسة حركة الأجسام في مثل هذه الجمل اللاعطالية والتأثيرات الناتجة عن حركة الجملة اللاعطالية .

II - الجمل الدوارة :

لتكن الجملة الثابتة في الفراغ oXYZ ولتكن oxyz جملة تدور بالنسبة للجملة الثابتة . لنعتبر الشعاع المتغير :

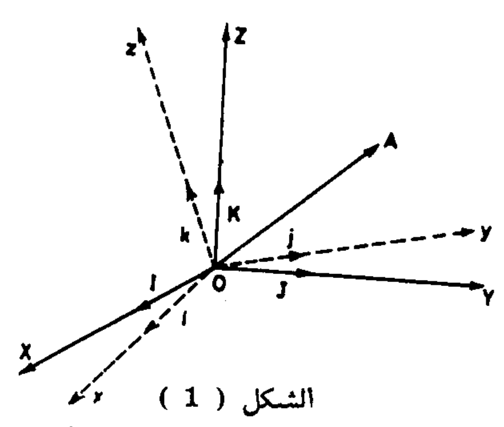
$$\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k} \qquad (1)$$

حيث المركبات A_1 ، A_2 ، A_3 محمولة على المحاور المتحركة وتابعة

للزمن . إن مشتق الشماع $\vec{A}$ ، بالنسبة للزمن ، في الجملة المتحركة (الدوارة) يعطي بالعلاقة :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M = \frac{dA_1}{dt}\vec{i} + \frac{dA_2}{dt}\vec{j} + \frac{dA_3}{dt}\vec{k} \qquad (2)$$

حيث يدل الرمز M على أن الاشتقاق يجري في الجملة المتحركة .



الشكل (1)

أما بالنسبة للجملة الثابتة oXYZ فليس الشماع $\vec{A}$ وحده هو المتغير بل واشمة الواحدة $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{k}$ نفسها أيضاً لانها محمولة على محاور تدور (تتغير) بالنسبة للجملة الاخيرة الثابتة . ولذا فان مشتق الشماع $\vec{A}$ بالنسبة لهذه الجملة هو :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = \frac{dA_1}{dt}\vec{i} + \frac{dA_2}{dt}\vec{j} + \frac{dA_3}{dt}\vec{k} + A_1\frac{d\vec{i}}{dt} + A_2\frac{d\vec{j}}{dt} + A_3\frac{d\vec{k}}{dt} \qquad (3)$$

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M + A_1\frac{d\vec{i}}{dt} + A_2\frac{d\vec{j}}{dt} + A_3\frac{d\vec{k}}{dt} \qquad (4)$$

حيث يدل الرمز F على أن الاشتقاق يجري في الجملة الثابتة .

ولما كانت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ اشمة واحدة فان مشتق كل منها هو شماع

واقع في مستوى الشعاعين الآخرين . فمثلا إن المشتق $\frac{d\vec{i}}{dt}$ للشعاع $\vec{i}$ هو شعاع متعامد مع $\vec{i}$ وبالتالي يقع في المستوى $(\vec{k} \text{ ، } \vec{j})$. لهذا يمكن أن نكتب :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = a_1 \vec{j} + a_2 \vec{k} \qquad (5)$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = a_3 \vec{k} + a_4 \vec{i} \qquad (6)$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = a_5 \vec{i} + a_6 \vec{j} \qquad (7)$$

ان المركبات a_1 و a_2 و . . . . و a_6 ترتبط ببعضها بعلاقات بسيطة يمكن ايجادها بسهولة .

نعلم أن $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ وبالتالي :

$$\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j} = 0 \qquad (8)$$

ونرى بضرب العلاقة (5) داخلياً بـ $\vec{j}$ والعلاقة (6) بـ $\vec{i}$ أن :

$$\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} = a_4 \text{ ، } \vec{j} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} = a_1 \qquad (9)$$

ومن (8) و (9) نرى ان $a_4 = - a_1$. وبنفس الطريقة نرى أن $a_5 = - a_2$ و $a_6 = - a_3$. وعندئذ تصبح العلاقات (5) ، (6) ، (7) بالشكل التالي :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = a_1 \vec{j} + a_2 \vec{k} \qquad (10)$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = a_3\,\vec{k} - a_1\,\vec{i} \qquad (11)$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = -a_2\,\vec{i} - a_3\,\vec{j} \qquad (12)$$

وبعد ذلك يمكن أن نكتب :

$$A_1 \frac{d\vec{i}}{dt} + A_2 \frac{d\vec{j}}{dt} + A_3 \frac{d\vec{k}}{dt} = (-a_1 A_2 - a_2 A_3)\,\vec{i}$$

$$+ (a_1 A_1 - a_3 A_3)\,\vec{j} + (a_2 A_1 + a_3 A_2)\,\vec{k} \qquad (13)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_3 & -a_2 & a_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \vec{\omega} \wedge \vec{A} \qquad (14)$$

حيث :

$$\vec{\omega} = \omega_1\,\vec{i} + \omega_2\,\vec{j} + \omega_3\,\vec{k}$$

$$\omega_1 = a_3 \quad , \quad \omega_2 = -a_2 \quad , \quad \omega_3 = a_1$$

واخيراً تصبح العلاقة (4) بالشكل :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{A} \qquad (15)$$

ويسمى الشعاع $\vec{\omega}$ بالسرعة الزاوية للجملة المتحركة بالنسبة للجملة الثابتة ، كما سنرى بعد قليل .

III - فاعل الاشتقاق الاول :

نسمي عملية الاشتقاق الممثلة بالرمز $\frac{d}{dt}$ « بفعل الاشتقاق » الاول

كما نسمي الفاعل الذي يقوم بعملية الاشتقاق وهو $\frac{d}{dt}$ « بفاعل الاشتقاق » الاول ونرمز له بالرمز D . وعليه يكون :

$$D_F = \left.\frac{d}{dt}\right|_F$$ = فاعل الاشتقاق الاول في الجملة الثابتة

$$D_M = \left.\frac{d}{dt}\right|_M$$ = فاعل الاشتقاق الاول في الجملة المتحركة

والاشتقاق في هذه الحالة بالنسبة للزمن . ويمكن تعميم التعريف من أجل اشتقاق بالنسبة لاي متحول آخر . ويجب الا يغيب عن الذهن ان هذه الفواعل لا قيمة معينة لها الا بتطبيقها على مقادير شعاعية .

إذا اخذنا التعاريف السابقة بعين الاعتبار امكن كتابة العلاقة (15) بالشكل الجديد :

$$D_F\vec{A} = D_M\vec{A} + \vec{\omega} \wedge \vec{A} \quad \text{او} \quad D_F\vec{A} = \left(D_M + \vec{\omega}\wedge\right)\vec{A} \qquad (16)$$

وعندئذ يمكن كتابة العلاقة بين فاعلي الاشتقاق في الجملتين الثابتة والمتحركة على الشكل

$$D_F = D_M + \vec{\omega} \wedge \qquad (17)$$

شريطة تطبيقها على مقادير شعاعية . هذه العلاقة على غاية من الاهمية بالنسبة للاشتقاق من مراتب اعلى كما نرى في الفقرة التالية .

IV- المشتق الثاني للشعاع في الجملتين المتحركة والثابتة :

نرى بسهولة ان المشتق الثاني للشعاع $\vec{A}$ في الجملة المتحركة هو :

$$\left.\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}\right|_M = \left.\frac{d}{dt}\right|_M \left.\frac{d}{dt}\right|_M \vec{A} = D_M D_M \vec{A} = D^2_M \vec{A}$$

$$= \frac{d^2A_1}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2A_2}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2A_3}{dt^2}\vec{k} \qquad (18)$$

اما المشتق الثاني في الجملة الثابتة فهو :

$$\left.\frac{d^2 \vec{A}}{dt^2}\right|_F = \left.\frac{d}{dt}\right|_F \left.\frac{d}{dt}\right|_F \vec{A} = D_F \, D_F \, \vec{A} = D^2_F \, \vec{A} \quad (19)$$

ويمكن الحصول عليه من اشتقاق العلاقة (16) في الجملة الثابتة ، أي بتطبيق فاعل الاشتقاق D على العلاقة المذكورة . وهذا يعطي :

$$D_F D_F \vec{A} = D_F \left(D_M \vec{A} + \vec{\omega} \wedge \vec{A} \right)$$

فباستعمال العلاقة (18) نجد :

$$D^2_F \vec{A} = \left(D_M + \vec{\omega} \wedge \right) \left(D_M \vec{A} + \vec{\omega} \wedge \vec{A} \right)$$

$$= D^2_M \vec{A} + D_M \left(\vec{\omega} \wedge \vec{A} \right) + \vec{\omega} \wedge D_M \vec{A} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{A} \right)$$

$$= D^2_M \vec{A} + \left(D_M \vec{\omega} \right) \wedge \vec{A} + 2 \vec{\omega} \wedge D_M \vec{A} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{A} \right) \quad (20)$$

وباخراج $\vec{A}$ نرى أن :

$$D^2_F \vec{A} = \left[D^2_M + \left(D_M \vec{\omega} \right) \wedge + 2 \vec{\omega} \wedge D_M + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \right] \vec{A} \quad (21)$$

V - فاعل الاشتقاق الثاني :

من العلاقـة الأخـيرة للمشتق الثاني نرى أن فاعل الاشتقـاق الثاني في الجملة الثابتة يعطى بالعلاقة :

$$D^2_F = D^2_M + \left(D_M \vec{\omega} \right) \wedge + 2 \vec{\omega} \wedge D_M + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \quad (22)$$

للحصول على مشتقـات من مرتبة أعلى نطبق فاعل الاشتقاق بالترتيب مرات متتاليـة حتى نحصل على المرتبة المرغوبة . نحصل مثلاً على المشتق الثالث بتطبيق الفاعل (18) على المشتق الثاني المعطى بالعلاقة (21) .

IV - السرعة والتسارع :

لتكن p نقطة تتحرك في الجملة المتحركة oxyz. وليكن $\vec{r}$ شعاع موضع

هـذه النقطة في تلك الجملة . من الواضح أن النقطة p في الحالة العـامة تتحرك بالنسبة للجملة العطالية OXYZ . سنعطي الرمز I للجملة العطـالية والرمز N للجملة اللاعطالية . من الواضح أن سرعة النقطة p في الجمـلة اللاعطالية (الدوارة) تعطى بالعلاقة :

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_N = D_N\vec{r} = \vec{V}_N \qquad (23)$$

وان تسارعها في هذه الحملة يعطى بالعلاقة :

$$\left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_N = D^2{}_N\vec{r} = \vec{a}_N \qquad (24)$$

أما السرعـة والتسارع في الجملة العطالية فيمكن الحصول عليها من العلاقتين (16) و (21) . فالسرعة عندئذ معطاة بالعلاقة :

$$\vec{V}_I = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_I = D_I\vec{r} = D_N\vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (25)$$

$$= \vec{V}_N + \vec{V}_{N,I} \qquad (26)$$

حيث $\vec{\omega}$ شعاع طويلتـه تساوي السرعـة الزاوية للجمـلة المتحركة (اللاعطالية) بالنسبة للجملة العطالية ومحمول على محور دوران الجملة اللاعطالية . ويتضح ذلك من أن

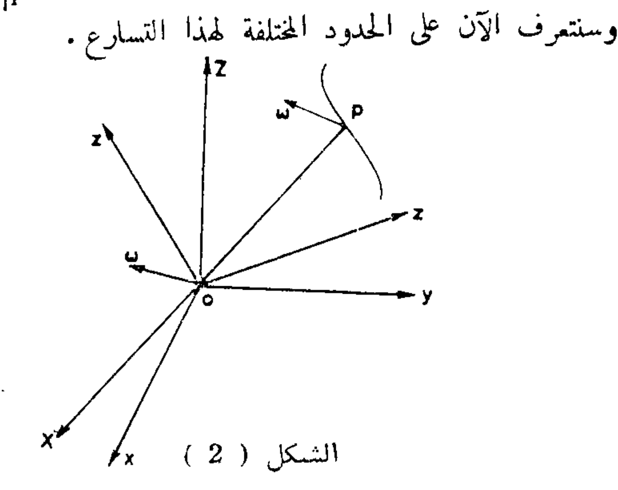
$$\vec{V}_{N,I} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (27)$$

يمثل السرعة الخطية لنقطة ثابتة في الجمـلة المتحركة وتنطبق في اللحظة t على النقطة المتحركة p وتتحرك على محيط دائرة نصف قطرها r . انظر الشكل (2) . ونسميها لذلك بسرعة « موضع » النقطة المتحركة في اللحظة t بالنسبة للجملة العطالية . ونقول « موضع » النقطة p (وهو ثابت في الجملة

المتحركة) تمييزاً له عن النقطة P نفسها (المتحركة في الجملة المتحركة).
وأما التسارع في الجملة العطالية فنحصل عليه من (21) التي تعطي :

$$\vec{a}_I = \left.\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}\right|_I = D^2_M \vec{r} + (D_M \vec{\omega}) \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge D_M \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (28)$$

وسنتعرف الآن على الحدود المختلفة لهذا التسارع .



الشكل (2)

يسمى التسارع $\vec{a}_I = D^2{}_I \vec{r}$ بالتسارع الحقيقي وهو شعاع النقطة P بالنسبة للجملة العطالية . أما التسارع $\vec{a}_N = D^2{}_N \vec{r}$ فيعرف بالتسارع الظاهري للنقطة P وهو تسارعها في الجملة اللاعطالية . وأما مجموع قيم حدود الطرف الأيمن للعلاقة الأخيرة فيشكل تسارع الجملة اللاعطالية $\vec{a}_{N,I}$ بالنسبة الى الجملة العطالية . ويمكن أن نكتب التسارع الأخير من تعريف حدوده الثلاثة على الشكل التالي :

$$\vec{a}_{N,I} = (D_N \vec{\omega}) \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) + 2\, \vec{\omega} \wedge D_N \vec{r} \quad (29)$$

حيث :

$$(D_N \vec{\omega}) \wedge \vec{r} \quad (30)$$ = التسارع الخطي للنقطة الثابتة في الجملة اللاعطالية والتي تنطبق في اللحظة t على النقطة المتحركة .
(التسارع الخطي لموضع المتحرك) .

$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$ (31) = التسارع الجاذب للنقطة الثابتة في الجملة العطالية والتي تنطبق في اللحظة t على النقطة المتحركة.
(التسارع الجاذب لموضع المتحرك).

$2\vec{\omega} \wedge D_N \vec{r}$ (32) = التسارع المتمم (كوريوليس) للنقطة الثابتة من الجملة العطالية والتي تنطبق في اللحظة t على النقطة المتحركة.
(تسارع كوريوليس لموضع المتحرك).

ويمكن إدراك هذه التسارعات لدى اعتبار حركة موضع المتحرك بالنسبة للجملة العطالية نفسها. وجميعها ناتجة عن دوران الجملة اللاعطالية، الأمر الوحيد المسبب لنشوء هذه التسارعات. ولهذا يمكن أن نكتب علاقة التسارع (29) كما يلي:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_N + \vec{a}_{N,1} \qquad (33)$$

حيث $\vec{a}_{N,1}$ يشكل مجموع التسارعات الواردة في (30), (31), (32).

VII - الجمل المتحركة بصورة عامة:

افترضنا فيما سبق ان الجملة اللاعطالية تقوم بحركة دورانية فقط بالنسبة للجملة الثابتة (العطالية) وان مركز الأولى ينطبق دوماً على مركز الثانية.

الشكل (3)

أما في الحالة العامة فان مركز الجملة المتحركة لا ينطبق على مركز الجملة الثابتة بل يتحرك حركة ما . ولذا كان لزاماً علينا اعتبار حركته في الحالة العامة . يبين الشكل (3) جملتين عطالية OXYZ ولا عطالية oxyz . ويتعين موضع المركز المتحرك o في الجملة العطالية بشعاع الموضع $\vec{R} = \vec{Oo}$ وبالتالي فحركة المركز المتحرك بالنسبة للجملة العطالية تتعين بسرعته $D_I\vec{R}$ وتسارعه $D^2{}_I\vec{R}$.

أما موضع المتحرك P فيتعين بالشعاع :

$$\vec{OP} = \vec{R} + \vec{r} \qquad (34)$$

وبدلك تكون سرعة P وتسارعها في الجملة العطالية بالترتيب :

$$\vec{V}_I = D_I\vec{OP} = D_I\vec{R} + D_I\vec{r}$$

$$= D_I\vec{R} + D_N\vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (35)$$

$$\vec{a}_I = D_I^2\,\vec{OP} = D_I^2\,\vec{R} + D_I^2\,\vec{r}$$

$$= D_I^2\vec{R} + D_N^2\vec{r} + (D_N\vec{\omega}) \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge D_N\vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (36)$$

ونلاحظ ببساطة أن الفرق بين السرعتين المعينتين بالعلاقتين (26) و(35) هو سرعة المركز المتحرك التي تظهر في العلاقة الاخيرة . وكذلك فان الفرق بين التسارعين المعينين بالعلاقتين (28) و (36) هو تسارع المركز المتحرك الذي يظهر في العلاقة الاخيرة . وأخيراً يمكن كتابة السرعه والتسارع في الجملة العطالية بالشكل :

$$\vec{V}_I = \vec{V}_N + \vec{V}_{N,I} \qquad (37)$$

$$\vec{a}_I = \vec{a}_N + \vec{a}_{N,I} \qquad (38)$$

حيث : $\vec{V}_{N,I} = D_I\vec{R} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

$$\vec{a}_{N,I} = D_I^2 \vec{R} + \left(D_N \vec{\omega} \right) \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge D_N \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r} \right) \quad (39)$$

في حين ان السرعة والتسارع الظاهريين (اي في الجملة اللاعطالية)

لا يزالان يعطيان بـ $D_N \vec{r}$ و $D^2_N \vec{r}$ بالترتيب .

VIII - حركة نقطة مادية حول الارض :

ان قوانين نيوتن التي هي أساس دراسة الميكانيك الكلاسيكي صحيحة في الجمل العطالية فقط كما اوردنا في حينه ، ولا يمكن تطبيقها في دراسة الحركات في جما لاعطالية إلا عن طريق ربط هـذه الجمل اللاعطاليـة بجمل عطالية . هـذا الربط تؤمنه علاقـة مثل العلاقة (36) التي تربط التسارع في جملة لاعطالية بالتسارع في الجملة العطالية . وعلى ذلك تكون معادلة الحركة لنقطـة مادية تتحرك في جملة محـاور لاعطاليـة كما يلي :

$$\vec{F} = m\vec{a}_I$$

$$= \left[D_I^2 \vec{R} + D_N^2 \vec{r} + \left(D_N \vec{\omega} \right) \wedge \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge D_N \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r} \right) \right] m \quad (40)$$

حيث $\vec{F}$ هي محصلة القوى الخارجيـة المؤثرة على الجزيء المتحرك كما يراها أو يقيسها مراقب موجود في الجملة العطالية . وإذا أردنا أن نعزل التسارع في الجملة اللاعطالية اخذت العلاقة الاخيرة الشكل :

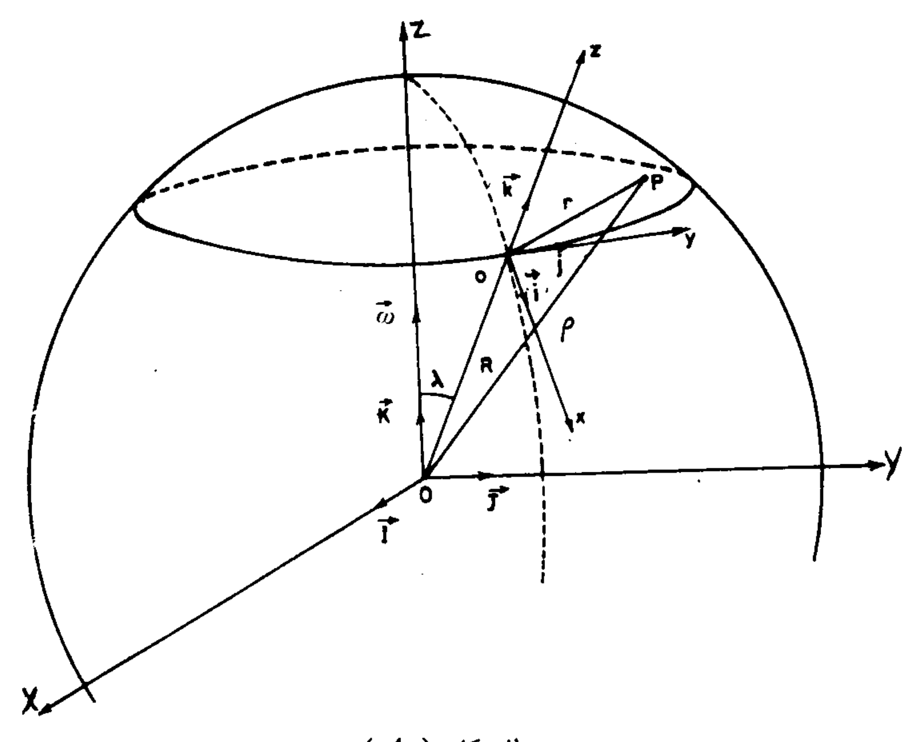
$$m D_N^2 \vec{r} = \vec{F} - m D_I^2 \vec{R} - m \left(D_N \vec{\omega} \right) \wedge \vec{r} - 2m \vec{\omega} \wedge D_N \vec{r} - m \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r} \right) \quad (41)$$

إذا فرضنا أن الشمس تتحرك حركة مستقيمة منتظمة في الفراغ واعتبرنا جملة محاور مركزها الشمس وبحيث يبقى كل من محاورها موازياً لنفسه أثنـاء حركة الشمس فان هذه الجملة تشكل عندئذ جملة عطالية . ولـما كانت حركـة الارض مؤلفة من حركـتين الاولى حول نفسها ودورها يوم

واحد والثانية حول الشمس ودورها 364 يوماً تقريباً فان دوران الأرض حول الشمس يطيء جداً بالنسبة لدورانها حول نفسها . وبالتالي يمكننا أن نهمل تأثير دوران الارض حول الشمس. وبالاضافة الى ذلك،ولما كان مسار الارض حول الشمس قطعاً ناقصاً كبيراً ، فان القوس الذي تقطعه الارض في زمن قصير نسبياً « عـدة أيام » يمكن اعتباره مستقيماً بشيء من التقريب . كما يمكن أن نعتبر سرعة الارض على مسارها ثابتة خلال تلك الفترة الزمنية القصيرة . ونرى لذلك أنه بامكاننا اعتبار حركة الأرض حـول الشمس خلال تلك الفترة كحركة مستقيمـة منتظمة بالاضافة إلى حركتها الدائرية حول نفسها . نستنتج مما تقـدم أنـه إذا اعتبرنا جملة المحاور OXYZ التي مركزها مركز الأرض ومحاورها توازي دائماً محاور الثلاثية آنفة الذكر والتي مركزها مركز الشمس ، فان من الممكن اعتبار هذه الجملة OXYZ جملة عطالية بتقريب جيد . انظر الشكل (4) .

والآن لنفرض أننا نريـد دراسة حركة متحرك P بالنسبة لراصد ثابت على الارض في النقطـة o المتعينة بتقاطع خطي طول وعرض معينـين . ولنختر الثلاثية المتماسكة مع الارض والتي مركزها موضع الراصد o . ومحاورها هي بالترتيب مماس خط العرض ومماس خط الطول والشاقول في ذلك المكان . هذه الجملة هي جملة لا عطالية لتماسكها مع الارض الدوارة ، فحركة P بالنسبة لهذه الجملة هي حركة في جملة لا عطالية . ولدراسة هذه الحركة نربط بين التسارعين في الجملتين العطالية OXYZ واللاعطالية oxyz كما فعلنا في الفقرة السابقة وتكون عندئذ الحركة معطاة بالمعادلة (41) .قارن الشكلين (3) و (4) .

إذا تأملنا الآن في حركة الارض حول نفسها ، أي حول المحور OZ ، وجدنا أن دورانها منتظم مما يجعل سرعتها الزاوية ثابتة . أو بتعبير آخر نرى أن شعاع الدوران $\vec{\omega}$ ثابت وبالتالي :



الشكل (4)

$$D_N \vec{\omega} = o \qquad (42)$$

ونرى كذلك أن :

$$D_I^2 \vec{R} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) \qquad (43)$$

كما أنه يمكننا أن نكتب القوة $\vec{F}$ على الشكل :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{\varrho^3}\vec{\varrho} + \vec{Fo} \qquad (44)$$

حيث m و M هما كتلتا المتحرك والأرض بالترتيب و $\vec{\varrho}$ شعاع موضع المتحرك بالنسبة لـ OXYZ و G ثابت التجاذب العالمي و $\vec{Fo}$ أية قوى أخرى غير قوة التجاذب . وعندئذ تأخذ معادلة الحركة (41) الشكل الجديد

$$D_N^2 \vec{r} = -\frac{GM}{\varrho^3}\vec{\varrho} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) - 2\vec{\omega} \wedge D_N \vec{r} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) + \vec{Fo}/m \quad (46)$$

$$= -\frac{GM}{\varrho^3}\vec{\varrho} - \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{R} + \vec{r})] - 2\vec{\omega} \wedge D_N \vec{r} + \vec{Fo}/m \quad (47)$$

نسمي الشعاع :

$$\vec{g} = -\frac{GM}{\varrho^3}\vec{\varrho} - \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{R} + \vec{r})] \quad (48)$$

بشعاع تسارع الجاذبية . ونكتب العلاقة (47) على الشكل التالي :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} - 2\left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}\right) + \vec{Fo}/m \quad (49)$$

حيث جميع الاشتقاقات تؤخذ في الجملة اللاعطالية oxyz .

ان العلاقة (49) هي المعادلة العامة للحركة التي تأخذ جميع القوى المؤثرة على المتحرك بعين الاعتبار . هـذا وان التسارع الجاذبي $\vec{g}$ يتغير تغيراً طفيفاً بقيمته المطلقة من مكان إلى آخر على سطح الأرض . ولذلك سنعتبر طويلته ثابتة .

وسنشتق فيما يلي المعادلات التحليلية للحركة .

إذا كانت $\vec{I}$ و $\vec{J}$ و $\vec{K}$ أشعة الواحدة على محاور OXYZ ، و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ أشعة الواحدة على محاور الثلاثية oxyz فان من السهل أن نرى أن :

$$\vec{K} = (\vec{K}.\vec{i})\,\vec{i} + (\vec{K}.\vec{j})\,\vec{j} + (\vec{K}.\vec{k})\,\vec{k}$$

$$= -\sin\lambda\ \vec{i} + \cos\lambda\ \vec{k} \quad (50)$$

حيث λ هي الزاوية المحصورة بين محور الأرض OZ والشعاع $\vec{Oo}$ المحدد لمركز الجملة اللاعطالية . ونكتب :

$$\vec{\omega} = \omega\vec{K} = -\omega\sin\lambda\ \vec{i} + \omega\cos\lambda\ \vec{k} \quad (51)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \qquad (52)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k} \qquad (53)$$

وبالتعويض من العلاقات الثلاث الاخيرة في المعادلة (49) ثم بالاسقاط على المحاور اللاعطالية ox و oy و oz نجد العلاقات التحليلية للحركة أي :

$$x'' = (2\omega\cos\lambda)\, y' + F_x/m \qquad (54)$$

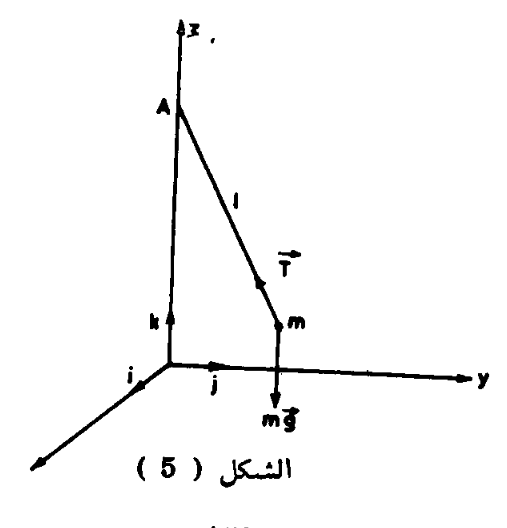
$$y'' = -(2\omega\cos\lambda)\, x' - (2\omega\sin\lambda)\, z' + F_y/m \qquad (55)$$

$$z'' = -g + (2\omega\sin\lambda)\, y' + F_z/m \qquad (56)$$

حيث F_x و F_y و F_z هي مركبات القوة Fo على المحاور ox و oy و oz على الترتيب . تلك هي المعادلات التحليلية لحركة متحرك بالنسبة للجملة اللاعطالية oxyz المتماسكة مع الأرض والتي مركزها الراصد o على خط عرض Θ يعطى بـ $\Theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$. وحل هذه المعادلات يتعلق بشروط البدء ويؤدي الى معرفة الحركة معرفة تامة . وفيما يلي تطبيق مهم .

IX- نواس فوكو :

سنطبق معادلات الحركة التحليلية (54)– (56) على دراسة نواس



الشكل (5)

فوكو (Foucault) وهو نواس بسيط مؤلف من كتلة m معلقة بخيط دقيق مهمل الكتلة طوله l ،كما مبين بالشكل (5) ،ويهتز حول وضع توازنه الشاقولي بسمات صغيرة . لقد لاحظ فوكو عام 1851 ان مستوى نوسان نواسه يتغير مع الزمن وبرهن من خلال دراسة حركة نواسه على دوران الأرض حول نفسها .

لتكن o نقطة على سطح الأرض ولتكن λ الزاوية المتممة لزاوية العرض لموضع o ولتكن كذلك النقطة A الثابتة نقطة تعليق النواس الذي طوله l . لنختر الثلاثية اللاعطالية oxyz بحيث تكون A على الشاقولي oz وعلى بعد OA = l . ولنفرض أن النواس ينوس في لحظة ما t في مستو شاقولي مار من oz . ان القوة التي تخضع لها كتلة النواس m مؤلفة من مركبتين الاولى ثقلها $m\vec{g}$ المتجهة نحو الأسفل والثانية قوة الشد $\vec{T}$ المحمولة على خيط النواس المتجهة من m الى A . يمكن كتابة هذه القوة الأخيرة بالشكل :

$$\vec{T} = (\vec{T}\cdot\vec{i})\,\vec{i} + (\vec{T}\cdot\vec{j})\,\vec{j} + (\vec{T}\cdot\vec{k})\,\vec{k}$$

$$= (T\cos\alpha)\,\vec{i} + (T\cos\beta)\,\vec{j} + (T\cos\gamma)\,\vec{k}$$

$$= -T\frac{x}{l}\,\vec{i} - T\frac{y}{l}\,\vec{j} - T\frac{z-l}{l}\,\vec{k} \qquad (57)$$

حيث $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ هي أشعةواحدةالمحاور oz , oy,ox وحيث α , β , γ هي الزوايا التي يصنعها النواس Am مع هذه المحاور الثلاثة وذلك على الترتيب .

من السهل جداً أن نرى ان معادلات الحركة العامة (54) ـ (56) تأخذ من أجل هذا النواس الشكل التالي .

$$x'' = (2\omega \cos\lambda)\, y' - \frac{T}{m}\frac{x}{l} \tag{58}$$

$$y'' = -(2\omega\cos\lambda)\, x' - (2\omega\sin\lambda)\, z' - \frac{T}{m}\frac{y}{l} \tag{59}$$

$$z'' = (2\omega\sin\lambda)\, y' - g - \frac{T}{m}\frac{z-l}{l} \tag{60}$$

ولما كانت سمة النواس صغيرة وطول النواس كبيراً فان من الممكن ان نعتبر الكتلة m تهتز في المستوى الافقي xoy المقابل $z = o$ ويكون عندئذ $z' = o$ و $z'' = o$ تقريباً . ولدى التعويض في المعادلات الاخيرة فاننا نحصل على العلاقات التالية :

$$T = my - 2\, m\, y' \sin\lambda \tag{61}$$

$$x'' = -\frac{gx}{l} + \frac{2\omega\, xy' \sin\lambda}{l} + 2\omega\, y' \cos\lambda \tag{62}$$

$$y'' = -\frac{g\,y}{l} + \frac{2\omega\, y\, y' \sin\lambda}{l} - 2\omega\, x' \cos\lambda \tag{63}$$

وترى بوضوح أن هذه المعادلات غير خطية لاحتواء الطرفين الايمنين من المعادلتين الاخيرتين على xy' و yy' . إلا أن هذين الحدين صغيران بمقارنتها مع y' و x' ولذلك يمكن اهمالها بتقريب جيد . وتصبح معادلتا الحركة على النحو التالي :

$$x'' = -g\frac{x}{l} + 2\omega\, y' \cos\lambda \tag{64}$$

$$y'' = -g\frac{y}{l} - 2\omega\, x' \cos\lambda \tag{65}$$

نعرف الآن المقدار العقدي u والثابتين a و b كما يلي :

$$u = x + i\,y \tag{66}$$

$$a = \omega\cos\lambda \tag{67}$$

$$b = \sqrt{g/l} \tag{68}$$

ونجمع العلاقتين (64) و (65) بعد ضرب طرفي الاخيرة بـ i فنجد :

$$\ddot{u} = -b^2 u - 2ia\dot{u} \qquad (69)$$

حل هذه المعادلة التفاضلية ذات الأمثال الثابتة يعطى بسهولة

$$u = (C_1 + iC_2)\exp[-i(a-b)t] + (D_1 + iD_2)\exp[-i(a+b)t] \qquad (70)$$

حيث $\exp(s) = e^s$.

وإذا فرضنا انه في لحظة البدء $t = o$ كان $x = o$ و $x' = o$ ثم $y = o$ و $y' = o$ وطبقنا شروط البدء هذه آخذين بعين الاعتبار ان a صغيرة جداً بالنسبة لـ b وجدنا :

$$D_1 = -C_1$$

$$D_2 = C_2\left(\frac{b-a}{b+a}\right) \simeq C_2$$

$$C_1 = o$$

$$C_2 = \tfrac{1}{2} C$$

ويصبح الحل الذي تمثله العلاقة (70) بالشكل :

$$u = \tfrac{1}{2} C[\sin(a-b)t + \sin(a+b)t] + \tfrac{1}{2} C[\cos(a-b)t + \cos(a+b)t]i \qquad (71)$$

وبفصل المقادير الحقيقية عن التخيلية نجد :

$$x = \tfrac{1}{2} C \sin(a-b)t + \tfrac{1}{2} C \sin(a+b)t \qquad (72)$$

$$y = \tfrac{1}{2} C \cos(a-b)t + \tfrac{1}{2} C \cos(a+b)t \qquad (73)$$

$$x = C \cos bt \sin at \qquad (74)$$

$$y = C \cos at \qquad (75)$$

واخيراً بالتعويض عن a و b بما يساويان نحصل على الشكل النهائي للعلاقتين السابقين :

$$x = C \cos(\sqrt{g/l}\, t) \sin(\omega t \cos\lambda) \qquad (76)$$

$$y = C \cos(\sqrt{g/l}\, t) \cos(\omega t \cos\lambda) \qquad (77)$$

والآن إذا كتبنا :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = C\cos(\sqrt{g/l}\ t)\ \vec{n} \qquad (78)$$

$$\vec{n} = \vec{i}\sin(\omega t\cos\lambda) + \vec{j}\cos(\omega t\cos\lambda) \qquad (79)$$

أمكننا أن نرى أن شعاع الوضع لمسقط كتلة النواس على المستوى الافقي محمول على الشعاع الدوار $\vec{n}$. وبالتالي فان مستوي النوسان المتعين بالشعاعين $\vec{n}$ و $\vec{k}$ ليس ثابتا بل يدور حول $\vec{k}$ ودوره يساوي دور الشعاع $\vec{n}$. فمن الواضح اذاً من العلاقتين (78) و (79) ان النواس ينوس بدور :

$$T_p = 2\pi(\sqrt{g/l})^{-1} = 2\pi\sqrt{l/g} \qquad (80)$$

في المستوى $(\vec{k}, \vec{n})$ الذي يدور حول $\vec{k}$ بدور قدره :

$$T = 2\pi/\omega\,|\cos\lambda| \qquad (81)$$

كما نلاحظ ان دور النواس ، T_p ، صغير جداً بالنسبة لدور مستويه ، T_n . ويتضح ذلك من المثال التالي : إذا فرضنا أن طول النواس خمسة امتار أي 500 cm وان زاوية عرض المكان الذي يوجد فيه النواس $\Theta = \frac{\pi}{2} - \lambda = 60°$ وادركنا ان السرعة الزاوية لدوران الارض هي

$$\omega = \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{day}} = \frac{2 \times 3.14\ \text{rad}}{86400\ \text{sec}} \cong 7.3 \times 10^{-5}\ \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

وجدنا عندئذ أن :

$$T_p = 2 \times 3.14\sqrt{500/980} \cong 4.5\ \text{sec}$$

وان :

$$T_n = 2 \times 3.14 / (7.3 \times 10^{-5}) \cong 1.7 \times 10^5\ \text{sec}$$

بالاضافة إلى ما تقدم فاننا نرى أن مستوى النوسان $(\vec{k}, \vec{n})$ يتعلق بالزاوية λ . فاذا كنا في نصف الكرة الشهالي كانت λ حادة و $\cos \lambda > o$ ويكون اتجاه دوران مستوى النوسان هو باتجاه عقارب الساعة . أما إذا كنا في نصف الكرة الجنوبي كانت λ منفرجة وكان $\cos \lambda < o$ ويكون عندئذ اتجاه دوران مستوى النوسان بعكس اتجاه عقارب الساعة . وفي الحالة الخاصة عندما يوضع النواس عند خط الاستواء تكون $\lambda = \pi/_2$ ، $\cos \lambda = o$ ويصبح الدور T_n لا نهائياً أي أن النواس ينوس في هذه الحالة في مستو ثابت . ويوضح المثال التالي الحالات المختلفة السابقة .

ليكن النواس في لحظة البدء $t_o = o$ في المستوي $(\vec{k}, \vec{j})$ وليكن في تلك اللحظة $\vec{j} = \vec{n}$. ولننظر الآن الى وضع الشعاع $\vec{n}$ بعد فترة زمنية تساوي ثمن دوره أي :

$$t = T_n / 8 = \frac{\pi}{4\omega |\operatorname{coc} \lambda|}$$

فنرى أن

$$\vec{n} = \vec{i} \sin[\omega \frac{T_n}{8} \cos \lambda] + \vec{j} \cos[\omega \frac{T_n}{8} \cos \lambda] .$$

$$\vec{n} = \vec{i} \sin[\omega \frac{\pi}{4\omega |\sin \lambda|} \cos\lambda] + \vec{j} \cos[\omega \frac{\pi}{4\omega |\cos \lambda|} \cos \lambda]$$

$$= \vec{i} \sin[\frac{n}{4} \frac{\cos \lambda}{|\cos\lambda|}] + \vec{j} \cos[\frac{n}{4} \frac{\cos \lambda}{|\cos\lambda|}]$$

ففي نصف الكرة الشهالي $\cos \lambda > o$ و $|\cos \lambda| = \cos \lambda$ وعندئذ :

$$\vec{n} = \vec{i} \sin \frac{\pi}{4} + \vec{j} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

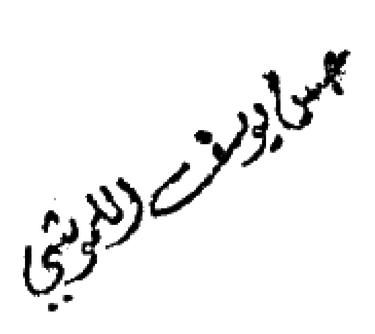
أي أن $\vec{n}$ وبالتالي مستوى النوسان $(\vec{k}, \vec{n})$ قد دار باتجاه عقارب الساعة .

وأما في نصف الكرة الجنوبي فان $\cos\lambda < o$ و $|sos\ \lambda| = -\cos\lambda$

وعندهـا :

$$\vec{n} = \vec{i}\sin\frac{-\pi}{4} + \vec{j}\cos\frac{-\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

بمعنى أن $\vec{n}$ وبالتـالي مستوى النوسان $(\vec{k}, \vec{n})$ قـد دار بعـكس اتجاه عقارب الساعة .



* * *



الفصل السابع

حركة المجموعات المادية

— المجموعات المستمرة والمتقطعة
— الكثافـة
— درجات الحريـة
— مركز الكتلـة
— اندفاع مجموعة جزيئات مادية
— حركة مركز الكتلـة
— مبدا الاندفاع الزاوي
— الطاقة الحركيـة والعمل
— الطاقة الكامنة ومبدأ انحفاظ الطاقة
— حركة المجموعة حول مركز كتلتها
— الدفـع
— قيـد الحركة
— العمل الافتراضي وتوازن المجموعات
— مبدأ دالمبير



I — المجموعات المستمرة والمتقطعة :

كنا حتى الآن نبحث بشكل أساسي حركة جسم صغير نعتبره كجزيء مادي يمثل كتلة متجمعة في نقطة واحدة . إلا أن الحالة الحقيقية والعملية للأجسام هي أنها تتألف من أعداد كبيرة أو صغيرة من الجزيئات المادية . ونقول عن جسم أنه مؤلف من مجموعة جزيئات مادية مستمرة او متقطعة تبعاً لكون الجزيئات متصلة او منفصلة بمسافات معينة عن بعضها . وفي كثير من الحالات العملية يمكن اعتبار مجموعة مستمرة كمجموعة متقطعة وذلك بتقسيمها إلى عدد محدود « قد يكون كبيراً » من الأجزاء . وكذلك يمكن اعتبار المجموعة المتقطعة كمجموعة مستمرة إذا كان اهمال المسافات التي تفصل جزيئاتها لا يؤدي إلى خطأ كبير في دراستها . فالجسم المؤلف من ذرات « كما نعلم » يمكن اعتباره مؤلفاً من جزيئات منفصلة او متصلة حسب الهدف من دراستها .

II — الكثـــافة :

يمكن ان نعرف ثلاثة انواع من الكثافة . فاذا كانت مادة الجسم موزعة توزيعاً حجمياً نعرف الكثافة الحجمية بأنها نسبة الكتلة ΔM التي تشغل حجماً Δv الى ذلك الحجم عندما يصبح الحجم صغيراً جداً .

$$\sigma_v = \lim_{\Delta z \to o} (\Delta M / \Delta v) = dM/dv \qquad (1)$$

وفي حالة التوزع السطحي نعرف الكثافة السطحية بشكل مشابه :

$$\sigma_s = \lim_{\Delta s \to o} (\Delta M / \Delta s) = dM/ds \qquad (2)$$

وأخيراً ففي التوزع الخطي للمادة نعرف الكثافة الخطية بالعلاقة :

$$\sigma_l = \lim_{\Delta l \to o} (\Delta M / \Delta l) = dM/dl \qquad (3)$$

حيث Δs و Δl عنصرا السطح والطول في التوزعين السطحي والخطي بالترتيب .

وبصورة عامة لا يشترط في توزع المادة أن يكون منتظماً . ولذلك فان الأنواع الثلاثة من الكثافة تابعة للموضع بشكل عام .

III — درجات الحرية :

ان عدد المقادير المستقلة اللازمة معرفتها لتعيين وضع المجموعة في أية لحظة من الزمن يسمى بعدد درجات الحرية للمجموعة . فالجزيء الواحد يتعين موضعه بثلاثة مقادير هي إحداثياته. ولذا فدرجات حريته ثلاث . والجملة المؤلفة من N جزيء مادي تتعين باحداثيات جزيئاتها وهي 3N فدرجات حريتها هي 3N . ودرجات حرية الجسم الصلب المتحرك في الفراغ هي 6 درجات وهكذا ... إلا أن درجات الحرية تنخفض إذا ما حققت المجموعة بعض الشروط التي تجعل بعض الاحداثيات مرتبطة بالأخرى بعلاقات معينة . وكل علاقة تجعل إحدى الاحداثيات تابعة للاحداثيات الأخرى وبالتالي تجعلها غير مستقلة وبذلك ينقص عدد الاحداثيات المستقلة بعدد العلاقات بين الاحداثيات ،وبالتالي ينخفض عدد درجات الحرية بنفس العدد . وعلى سبيل المثال فإن درجات حرية جملة مؤلفة من ثلاث نقاط مختلفة هي تسع ، أي بعدد الاحداثيات التسع اللازمة لتعيين مواضع نقاط الجملة (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) و (x_3, y_3, z_3) . ولكن إذا كانت هذه النقاط متعينة بحيث تبقى المسافات بينها ثابتة فان هناك ثلاث علاقات تربط الاحداثيات المختلفة وهي :

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = R_{12}^2 \qquad (4)$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = R_{23}^2 \qquad (5)$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = R_{31}^2 \qquad (6)$$

ولذلك تصبح درجات الحرية ستاً بدلاً من تسع .

VI — مركز الكتلة :

لتكن الجملة المادية المؤلفة من N جسيماً كتلها $(m_1, m_2, m_3, ..., m_N)$

وأشعة مواضعها $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots, \vec{r}_N)$. يعرف مركز كتلة المجموعة C بأنه النقطة التي يحقق شعاع موضعها $\vec{r}_c$ العلاقة

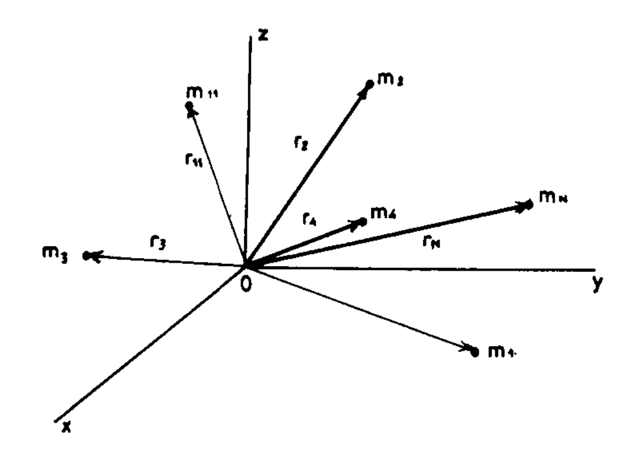
$$\vec{r}_c = \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n / M. \tag{7}$$

كما في الشكل (1) ، حيث

$$M = \sum_{n=1}^{N} m_n \tag{8}$$

هي كتلة المجموعة بكاملها .

ولما كان ثقل الجسيم هو جداء كتلته بتسارع الثقالة فان مركز الثقل يعطى بالعلاقة (7) ذاتها .



الشكل (1)

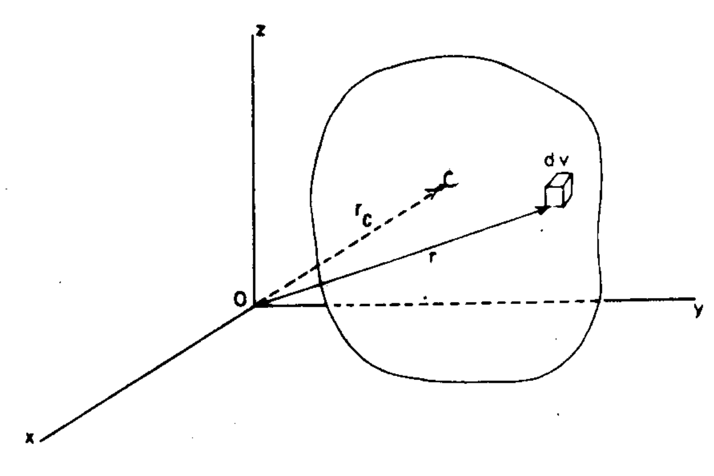
أما إذا كانت الجملة المادية جسماً مستمراً R فان العلاقة التي تعين مركز الكتلة أو مركز الثقل تأخذ شكلاً تكاملياً أي :

$$\vec{r}_c = \int_R \sigma(r)\, \vec{r}\, dv \Big/ M \tag{9}$$

$$M = \int_R \sigma(r)\, dv \tag{10}$$

حيث σ كثافة الجسم وهي بصورة عامة تابعة للموضع $\vec{r}$.

إذا كتبنا أشعة الموضع بدلالة الاحداثيات الديكارتية واسقطنا العلاقتين



الشكل (2)

(7) و (9) على المحاور حصلنا على العلاقات :

$$x_c = \sum_n m_n x_n / M \quad \text{أو} \quad x_c = \int_R \sigma x \, dv \qquad (11)$$

$$y_c = \sum_n m_n y_n / M \quad \text{أو} \quad y_c = \int_R \sigma y \, dv \qquad (12)$$

$$z_c = \sum_n m_n z_n / M \quad \text{أو} \quad z_c = \int_R \sigma z \, dv \qquad (13)$$

$$M = \sum_n m_n \quad \text{او} \quad M = \int_R \sigma \, dv \qquad (14)$$

حيث التكامل حجمي أو سطحي او خطي حسب طبيعة الجملة . وتبعاً لذلك يكون العنصر dv والكثافة σ حجميين او سطحيين أو خطيين . كما ان الاشارة $\sum$ تأخذ بعين الاعتبار جميع قيم n .

V — اندفاع مجموعة جزيئات مادية :

إذا كانت m_n كتل الجزيئات و $\vec{r}_n$ أشعة مواضعها و $\vec{v}_n$ سرعها فان اندفاع المجموعة يعرف بأنه مجموع اندفاعات الجزيئات المختلفة أي :

$$\vec{p} = \sum_n \vec{p}_n = \sum_n m_n \vec{v}_n = \sum_n m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt} \qquad (14)$$

إلا ان اشتقاق العلاقة (7) يعطي :

$$\sum_n m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt} = M \frac{d\vec{r}_c}{dt} = M \vec{v}_c \qquad (15)$$

ومن (14) و (15) نجد

$$\vec{p} = M \vec{v}_c \qquad (16)$$

وتدل هذه العلاقة الاخيرة على أن الاندفاع الكلي يكافيء اندفاع مركز الكتلة فيما لو وضعت فيه كتلة المجموعة بكاملها . ويسمى الطرف الايمن من العلاقة (16) باندفاع مركز الكتلة او أندفاع مركز الثقل .

IV — حركة مركز الكتلة :

لتكن $\vec{F}_i$ محصلة القوى الخارجية المؤثرة على النقطة i من الجملة ، ولتكن $\vec{f}_{ij}$ القوة التي تؤثر بها النقطة j على النقطة i . وهذه القوة تسمى قوة داخلية . إن مجموع القوى المؤثرة على النقطة i هو القوة الخارجية $\vec{F}_i$ وجميع القوى الداخلية $\sum \vec{f}_{ij}$ الناتجة عن جميع النقاط الأخرى عدى النقطة i . ويمكن أن نزيل هذا الاستثناء إذا أدركنا أن القوة التي تؤثر بها نقطة على نفسها معدومة أي $\vec{f}_{ii} = 0$. إذاً وحسب قانون نيوتن الثاني فان معادلة حركة النقطة (أو الجزيء) i تعطى بالعلاقة :

$$\vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \qquad (17)$$

وبأخذ حركة جميع الجزيئات بعين الاعتبار وجمع معادلات حركتها طرفاً إلى طرف نجد :

$$\sum_i \vec{F_i} + \sum_i \sum_j \vec{f_{ij}} = \sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r_{ij}}}{dt^2} \qquad (18)$$

ولما كان $\vec{F_{ij}} = - \vec{F_{ji}}$ حسب مبدأ رد الفعل فان المجموع المضاعف في الطرف الايسر من (18) معدوم . وبالاضافة إلى ذلك ، إذا رمزنا لمجموع القوى الخارجية بـ $\vec{F}$ ولاحظنا أن اشتقاق العلاقة (7) مرتين متتاليتين يعطي

$$\sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r_i}}{dt^2} = M \frac{d^2 \vec{r_c}}{dt^2} = M \vec{a_c} \qquad (19)$$

لامكن كتابة العلاقة (18) بالشكل

$$\vec{F} = M \vec{a_c} \qquad (20)$$

تدل هذه العلاقة على أن مركز الثقل C للجملة يتحرك وكأنه خاضع لمجموع القوى الخارجية المؤثرة في مختلف جزيئات المجموعة ويحمل كتلة المجموعة بكاملها .

من الواضح أن اندفاع مركز الثقل يساوي مجموع اندفاعات الجزيئات المختلفة للجملة اي ان :

$$\vec{p_c} = M\vec{v_c} = M \frac{d\vec{r_c}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d \vec{r_i}}{dt} = \sum_i \vec{p_i} \qquad (21)$$

والعلاقة (20) تكتب بالشكل :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p_c}}{dt} \qquad (22)$$

فاذا كانت القوى الخارجية معدومة فان العلاقة الاخيرة تدل على أن اندفاع الجلة $\vec{p}$ المساوي لاندفاع مركز الثقل $\vec{p_c}$ ثابت دوماً . وهذا

ما يسمى بمبدأ انحفاظ الاندفاع . وتكون حركة مركز الثقل مستقيمة منتظمة .

VII — مبدا الاندفاع الزاوي :

يعرف الاندفاع الزاوي الكلي للجملة بأنه مجموع الاندفاعات الزاوية لجزيئاتها أي :

$$\vec{\Omega} = \sum_i \vec{r_i} \wedge m_i \vec{v_i} = \sum_i m_i \left(\vec{r_i} \wedge \vec{v_i} \right) \qquad (23)$$

والعزم الحاصل للقوى الخارجية المؤثرة على الجملة هو :

$$\vec{\Lambda} = \sum_i \vec{r_i} \wedge \vec{F_i} \qquad (24)$$

باشتقاق الاندفاع الزاوي بالنسبة للزمن نجد :

$$d\vec{\Omega} / dt = \sum_i m_i \left[(\vec{v}_i \wedge \vec{v}_i) + (\vec{r}_i \wedge \vec{a}_i) \right]$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{r_i} \wedge \vec{a_i} \right) = \sum_i \vec{r_i} \wedge m_i \vec{a}$$

$$= \sum_i \vec{r_i} \wedge \vec{F} \qquad (25)$$

إن مقارنة العلاقتين (24) ، (25) تؤدي إلى العلاقة الهامة :

$$\vec{\Lambda} = d\vec{\Omega} / dt \qquad (26)$$

اي ان العزم الحاصل يساوي مشتق الاندفاع الزاوي بالنسبة للزمن . وهذا ما يعرف بمبدأ الاندفاع الزاوي . وهذا المبدأ على جانب كبير من الاهمية في دراسة الجمل الميكانيكية .

إذا كانت القوى الخارجية المؤثرة في الجملة معدومة فان عزوم هذه القوى معدومة أيضاً وبالتالي فالعزم الحاصل $\vec{\Lambda}$ معدوم . وتدل العلاقة (26) عندئذ على ان الاندفاع الزاوي ثابت اي انه محفوظ . يسمى ما تقدم بمبدأ انحفاظ الاندفاع الزاوي .

VIII — الطاقة الحركية والعمل :

تتألف الطاقة الحركية لجملة ميكانيكية من مجموع الطاقـات الحركية لجزيئاتها أي :

$$T = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \, v_i^2 = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2 \qquad (27)$$

وعندما تتحرك الجملة بتأثير قوى خارجية $\vec{F}_i$ على جزيئاتها فان العمل الذي تنجزه لدى الانتقال من موضع اول الى موضع ثان هو :

$$W_{1,2} = \sum_i \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

حيث التكامل من موضع البدء إلى موضع النهاية .

وبالتعويض عن القوى $\vec{F}_i$ بـ $m_i \; \vec{a}_i$ ، حسب قانون نيوتن الثاني ، نجد :

$$W_{1,2} = \sum_i \int m_i \, \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \int m_i \, \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i$$

$$= \sum_i \int m_i \, \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i = \sum_i \left[\tfrac{1}{2} m_i \, v_i^2 \right]_1^2$$

$$= T_2 - T_1 \qquad (28)$$

اي ان العمل المنجز يساوي تزايد الطاقة الحركية للمجموعة .

$$W_{1,2} = T_2 - T_1 \qquad (29)$$

IX — الطاقة الكامنة ومبدا انحفاظ الطاقة :

عندما تكون جميع القوى الداخلية والخارجية المؤثرة في مختلف نقاط المجموعة محافظة فان كلاً منها يشتق من كون ويكون لكل من نقاط المجموعة الميكانيكية طاقة كامنة قدرها :

$$V_i = - \int (\vec{F}_i + \sum \vec{f}_{ii}) \, d\vec{r}_i \qquad (30)$$

وحيث يعتبر مبدأ الكمون اختيارياً كما نعلم . وتكون الطاقة الكامنة الكلية للجملة :

$$V = \sum_i V_i = -\int \Big[\sum_i \vec{F_i} + \sum_i \sum_j \vec{f_{ij}} \Big] \cdot \vec{dr_i}$$

$$= -\int \sum_i \vec{F_i} \cdot d\vec{r_i} - \int \sum_i \sum_i \vec{f_{ij}} \cdot d\vec{r_i} \qquad (31)$$

$$= V_{ext} + V_{int} \qquad (32)$$

حيث V_{ext} الكمون الناتج عن القوى الخارجية والمعطى بالتكامل الاول من (31) و V_{int} الكمون الناتج عن القوى الداخلية والمعطى بالتكامل الثاني من نفس العلاقة . اما الاول فيمكن حسابه عند معرفة القوى $\vec{F_i}$ واما الثاني فيمكن كتابته بشكل جديد نراه فيما يلي .

إذا كان U_{ij} كمون القوة $\vec{f_{ij}}$ التي تؤثر بها النقطة j على النقطة i وإذا كان U_{ji} كمون القوة $\vec{f_{ji}}$ التي تؤثر بها النقطة i على النقطة j ، فان هذين الكمونين متساويان اي :

$$U_{ij}\,(\vec{r_{ij}}) = U_{ji}\,(\vec{r_{ji}}) \qquad (33)$$

وبالتالي نكتب :

$$\vec{f_{ij}} = -(\partial U_{ij} / \partial x_i)\,\vec{i} - (\partial U_{ij} / \partial y_i)\,\vec{j} - (\partial U_{ij} / \partial z_i)\,\vec{k}$$

$$\vec{f_{ji}} = -(\partial U_{ji} / \partial x_j)\,\vec{i} - (\partial U_{ji} / \partial y_j)\,\vec{j} - (\partial U_{ji} / \partial z_j)\,\vec{k}$$

ومن ذلك نكتب :

$$-\left(\vec{f_{ij}} \cdot \vec{dr_i} + \vec{f_{ji}} \cdot \vec{dr_j}\right) = \Big[\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial Uij}{\partial y_j} dy_j + \frac{\partial Uij}{\partial z_j} dz_j \Big]$$

$$= \quad d\,U_{ij} \qquad \text{(تفاضل كلي)} \qquad (34)$$

ويمكن أن نرى بسهولة أن :

$$\sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = \sum_j \sum_i \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_j \qquad (35)$$

من الملاقتين (34) و (35) نستنتج ان :

$$\sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_j dU_{ij}$$

وعندئذ يأخذ الكمون الداخلي الشكل التالي :

$$V_{int} = -\int \sum_i \sum_j f_{ij} \cdot dr_i = \tfrac{1}{2} \int \sum_i \sum_j dU_{ij}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_j U_{ij} \qquad (36)$$

ونرى بسهولة ان العمل المنجز من قبل القوى الخارجية والداخلية لدى الانتقال من وضع إلى وضع آخر يساوي فرق الكمون للقوى الداخلية والخارجية اي :

$$W_{1,2} = V_1 - V_2 = (V_{ext})_1 + (V_{int})_1 - (V_{ext})_2 - (V_{int})_2$$

ومن جهة أخرى :

$$W_{1,2} = T_2 - T_1$$

ومنها نجد أن الطاقة الكلية « مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة » ثابتة أو محفوظة أي :

$$E = V_1 + T_1 = V_2 + T_2 \qquad (37)$$

وهذا ما يعرف بمبدأ انحفاظ الطاقة الكلية . وهو ايضاً على جانب كبير من الاهمية في دراسة حركة جملة جزيئات مادية .

X — حركة المجموعة حول مركز كتلتها :

من المفيد في كثير من الأحيان أن ندرس حركة جملة ميكانيكية حول مركز كتلتها . لذا فان النظريات التالية ذات أهمية كبيرة .

أ - **نظرية** : إن الاندفاع الخطي للجملة حول مركز كتلتها

معلوم . ينتج البرهان مباشرة إذا اعتبرنا مركز الكتلة مبدأ للاحداثيات ، حيث تصبح العلاقة (7) بالشكل :

$$\sum_i m_i \vec{\varrho}_i = 0$$

حيث $\vec{\varrho}_i$ شعاع موضع النقطة i بالنسبة لمركز الكتلة . وبالاشتقاق نحصل على المطلوب .

كما أنه يمكن البرهان على النظرية بكتابة علاقة مركز الكتلة (7) على الشكل :

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\sum_i m_i\,(\vec{r}_c + \vec{\varrho}_i) = \vec{r}_c + \frac{1}{M}\sum_i m_i\,\vec{\varrho}_i$$

ومنها :

$$\sum_i m_i \varrho_i = 0$$

وبالاشتقاق نحصل على المطلوب .

ب ــ **نظرية** : الاندفاع الزاوي الكلي حول أية نقطة يساوي الاندفاع الزاوي لمركز الكتلة ، وكأنه يحمل كتلة الجملة بكاملها ، مضافاً إليه الاندفاع الزاوي للجملة حول مركز الكتلة .

للبرهان نكتب الاندفاع الزاوي $\vec{\Omega}$ كما يلي :

$$\vec{\Omega} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i(\vec{r}_c + \vec{\varrho}_i) \wedge (\vec{r}_c' + \vec{\varrho}_c')$$

$$= \sum_i \vec{r}_c \wedge m_i \vec{r}_c' + \vec{r}_c \wedge \sum_i m_i \vec{\varrho}_i' - \vec{r}_c' \wedge \sum_i m_i \vec{\varrho}_i + \sum_i \varrho_i \wedge m_i \vec{\varrho}_i'$$

ولكن :

$$\sum_i m_i \vec{\varrho}_i' = 0 \quad ، \quad \sum_i m_i \vec{\varrho}_i = 0$$

إذاً :

$$\vec{\Omega} = \vec{r}_c \wedge M\vec{r}_c' + \sum_i \varrho_i \wedge m_i \vec{\varrho}_i' \qquad (38)$$

أو :

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_c + \vec{\Omega}_o \qquad (39)$$

حيث $\vec{\Omega}_c$ الاندفاع الزاوي لمركز الكتلة و $\vec{\Omega}_o$ الاندفاع الزاوي للجملة حول مركز الكتلة .

حـ — **نظرية** : الطاقة الحركية الكلية للجملة تساوي الطاقة الحركية لمركز الكتلة « وكأنه يحمل كتلة الجملة بكاملها » مضافاً اليها الطاقة الحركية للجملة حول مركز الكتلة .

ينتج البرهان بطريقة مشابهة تماماً للتي اتبعت في النظرية السابقة وتؤدي إلى العلاقة :

$$T = \tfrac{1}{2} M v_c^2 + \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \varrho_i'^2 = T_c + T_o$$

د — **نظرية** : العزم الحاصل حول مركز كتلة الجملة لجميع القوى الخارجية المؤثرة فيها يساوي المشتق بالنسبة للزمن للاندفاع الزاوي حول مركز الكتلة . أي :

$$\vec{A}_o = d\vec{\Omega}_o / dt \qquad (41)$$

للبرهان نبدأ بالعلاقة العامة (26) التي سبق أن برهنا على صحتها وهذه العلاقة تكتب بالشكل :

$$\sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \frac{d}{dt}\Big[\sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{r}_i' \Big] = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{r}_i''$$

وبتعويض $\vec{r}_i$ بـ $\vec{\varrho}_i + \vec{r}_c$ في العلاقة الاخيرة وملاحظة الحدود المعدومة نجد :

$$\sum_i \vec{r}_c \wedge \vec{F}_i + \sum_i \vec{\varrho}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_c \wedge m_i \vec{r}_c'' + \sum_i \vec{\varrho}_i \wedge m_i \vec{\varrho}_i'' \qquad (42)$$

ولكن :

$$\sum_i \vec{r}_c \wedge \vec{F}_i = \vec{r}_c \wedge \sum_i \vec{F}_i = \vec{r}_c \wedge \vec{F} = \vec{\Lambda}_c$$

وكذلك

$$\sum_i \vec{r}_c \wedge m_i \vec{r}''_c = \vec{r}_c \wedge M\vec{r}''_c = \vec{r}_c \wedge \vec{F} = d\vec{\Omega}_c / dt$$

إذاً :

$$\vec{\Lambda}_c = d\vec{\Omega}_c / dt = \vec{\Omega}'_c \qquad (43)$$

وتصبح العلاقة (42) :

$$\sum_i \vec{\varrho}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i \vec{\varrho}_i \wedge m_i \vec{\varrho}''_i$$

أو :

$$\vec{\Lambda}_o = d\vec{\Omega}_o / dt = \vec{\Omega}'_o$$

XI— الدفع :

إذا كانت $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ حاصلة القوى الخارجية المؤثرة في الجملة فاننا نعرف الدفع الخطي الـكلي للجملة بين اللحظتين t_1 و t_2 بالمقدار :

$$\vec{J}_l = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt \qquad (44)$$

كما نعرف الدفع الزاوي الكلي بالمقدار :

$$\vec{J}_a = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\Lambda}\, dt \qquad (45)$$

حيث $\vec{\Lambda}$ العزم الحاصل للقوى $\vec{F}_i$. هذا ويحقق الدفع الخطي والدفع الزاوي النظريتين التاليتين :

أ ـــ **نظرية** : الدفع الخطي بين اللحظتين t_1 و t_2 يساوي تغير الاندفاع بينهما .

$$\vec{J}_l = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \vec{F}_i\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i d\vec{p}_i = \sum_i (\vec{p}_i)_2 - \sum_i (\vec{p}_i)_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

إذاً :

$$\vec{J}_l = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \qquad (46)$$

حيث تفيد هذه العلاقة ما ورد في نص النظرية .

ب ــ نظرية : الدفع الزاوي بين اللحظتين t_1 و t_2 يساوي تغير الاندفاع الزاوي بينهما .

$$\vec{J}_a = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\Lambda}\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (d\vec{\Omega} / dt)\, dt = \vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1$$

إذاً :

$$\vec{J}_a = \vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1 \qquad (47)$$

ومفاد هذه العلاقة يطابق مضمون نص النظرية .

XII ــ قيد الحركة :

غالباً ما يفرض على الجملة الميكانيكية أن تتحرك بشكل معين . في حالة الجسم الصلب يتحرك الجسم بحيث تبقى المسافة بين أية نقطتين منه ثابتة . وفي حركة نقطة واحدة ، قد تجبر هذه النقطة على التحرك على سطح أو منحن . مثل هذه الحركات تسمى بالمقيدة . وتحديد الحركة بشكل معين يسمى قيد الحركة

إذا أمكن التعبير عن القيد بالشكل الرياضي

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots, \vec{r}_n, t) = 0 \tag{48}$$

أي إذا أمكن إيجاد علاقة جبرية تربط أشعة مواضع نقاط الجملة والزمن فاننا نسمي القيد الذي تعبر عنه العلاقة قيداً هولونومياً ، وإلا فنسمي القيد بالقيد اللاهولونومي ، كأن تكون علاقة القيد تفاضلية مثلاً .

XIII ــ العمل الافتراضي وتوازن المجموعات :

لنعتبر وضعين مختلفين للجملة منسجمين مع القوى والقيود المطبقة عليها . للانتقال من أحد الوضعين إلى الآخر يكفي أن نعطي كل جزيء من جزيئاتها انتقالاً مباشراً من الوضع الأول إلى الوضع الثاني له . نسمي هذا الانتقال بالانتقال الافتراضي ونعطيه الرمز « $\delta \vec{r}_i$ » بالنسبة للجزيء « i » تمييزاً له عن الانتقال الفعلي $\vec{dr}_i$ الذي يحصل بتأثير القوى المطبقة وضمن القيود المفروضة . وللانتقال الافتراضي جميع خواص الانتقال الفعلي . فمثلاً :

$$\delta(\sin\Theta) = \cos\Theta\, \delta\Theta$$

نعلم أن الشرط اللازم لكي تتوازن الجملة هو أن تكون القوى المطبقة عليها معدومة . وينتج من ذلك أن ما نسميه بالعمل الافتراضي للقوى $\vec{F}_i$ المطبقة على الجزيئات i معدوم أي :

$$\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

وبجمع الاعمال الافتراضية على جميع الجزيئات نجد :

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \tag{49}$$

وإذا كانت الحركة مقيدة أمكن تحليل القوة $\vec{F}_i$ الى جزئين : القوة الفعلية $\vec{F^a}_i$ وقوة رد الفعل $\vec{F^c}_i$ أي :

$$\vec{F}_i = \vec{F^a}_i + \vec{F^c}_i \tag{50}$$

ولما كان رد الفعل متعامداً مع المسار فان عمله معدوم وبالتالي إذا عوضنا في (49) وجدنا :

$$\sum_i \vec{F}_{a_i} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \qquad (51)$$

وتدل هذه العلاقة على ان الجملة تتوازن إذا كان العمل الافتراضي الكلي للقوى الفعلية المطبقة عليها معدوماً . وهذا ما يعرف باسم مبدأ العمل الافتراضي .

عندما تكون القوي محافظة «مشتقة من كمون V » فان شروط التوازن هي :

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \text{ و } \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0 , \ldots . \qquad (52)$$

حيث q_1 ، q_2،... هي الاحداثيات المختلفة للجملة . وعندئذ يكون العمل الافتراضي مساوياً

$$\delta W = -\frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2 - \ldots = -\delta V = 0 \qquad (53)$$

وهذا يدل على ان العلاقات (52) تكافيء مبدأ العمل الافتراضي تماماً .

يكون التوازن مستقراً إذا كان الكمون V في نهاية صغرى . فاذا كان الكمون تابعاً لاحداثية واحدة q_1 مثلاً يكفي عندئذ أن يكون

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \text{ و } \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} > 0 \qquad (54)$$

حتى يكون التوازن مستقراً .

هذا ويمكن أن يكون التوازن مستقراً بالنسبة لبعض الاحداثيات وقلقاً بالنسبة للبعض الآخر . فاذا كان مثلاً

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \text{ و } \frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} > 0$$

وكان

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \text{ و } \frac{\partial^2 V}{\partial q_j^2} < 0$$

قلنا ان التوازن مستقر بالنسبة للاحداثية q_i وقلق بالنسبة للاحداثية q_j.

XIV — مبدا دالمبير .

يمكن أن نعمم مبدأ العمل الافتراضي ليشمل الحركة بالاضافة إلى السكون . فكل نقطة i من الجملة تتحرك وفقاً لقانون نيوتن الثاني .

$$\vec{F_i} = d\vec{p_i} / dt$$

أو :

$$\vec{F_i} - d\vec{p_i} / dt = o \qquad (55)$$

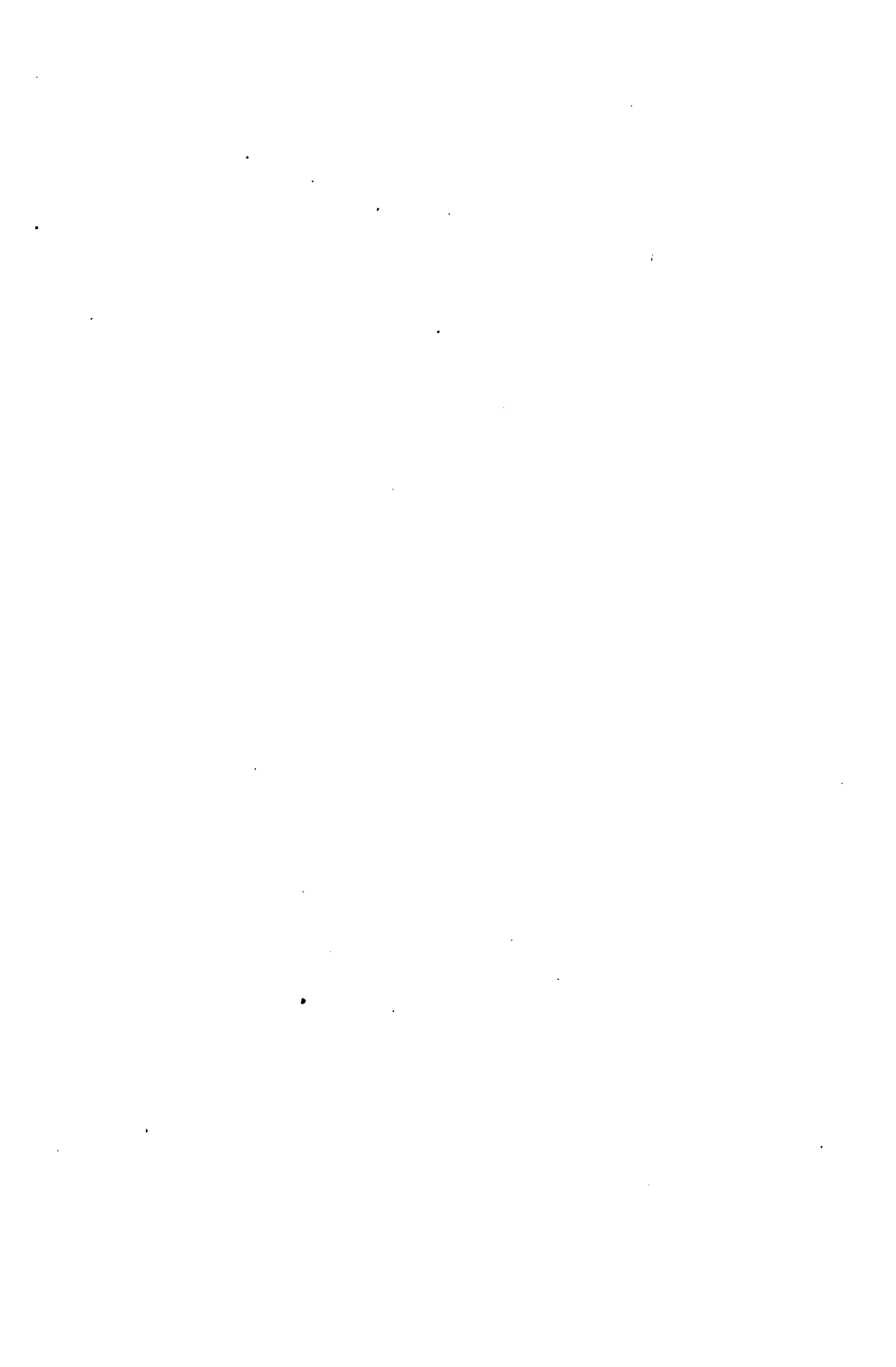
حيث $\vec{p_i}$ اندفاع النقطة i . وتعني هذه العلاقة الأخيرة ان النقطة i يمكن أن تعتبر متوازنة تحت تأثير مجموع القوتين $\vec{F_i}$ و $-d\vec{p_i}/dt$ — وتدعى الاخيرة منها أحياناً بالقوة المنتجة العكوسة للنقطة $\vec{i}$. وباستعمال مبدأ العمل الافتراضي لجميع الجزيئات أو النقاط يمكن أن نقول :

تتحرك الجملة المادية بشكل يكون فيه العمل الافتراضي

$$\sum_i (\vec{F_i} - d\vec{p_i}/dt) . \delta \vec{r_i} = o \qquad (56)$$

وهذا ما يسمى بمبدأ دالمير . وبهذا المعنى يمكن اعتبار الحركة حالة خاصة من السكون .

* * *



الفصل الثامن

الصواريخ ـ الانقسام ـ الاصطدام

— حركة كتلة متغيرة ومبدأ المحركات النفاثة
— انقسام جسم الى قسمين وحركة كل منهما
— الصواريخ ذات المراحل المتعددة
— قاعدة نيوتن في الاصطدام ـ مرونة الاصطدام
— الاصطدام الراسي لجسيمين ماديين
— الاصطدام الجانبي

تعـد دراسة حركة الصواريخ والكتل المتغيرة والاصطدام من أهم التطبيقات على الفصل السابق ، أي مجموعات النقاط المادية . وسنتناول هـذه الموضوعات كلا على انفراد في الفقرات التالية .

I — حركة كتلة متغيرة ـ مبدأ المحركات النفاثة (الصاروخية) :

في جميع دراساتنا السابقة كنا نعتبر أن كتلة الجملة المتحركة ثابتة . إلا أن هذا الاعتبار ليس صحيحاً دائماً وفي جميع الحالات . ولذلك سندرس أولاً حركة الكتلة المتغيرة تغيراً مستمراً . وهذه الدراسة تنطبق على حركة الصواريخ التي تتغير كتلتها باستمرار لفقدانها الوقود الذي تنفثه بعد الاحتراق .

لتكن m الكتلة الكلية للصاروخ (مع وقوده) في اللحظة t . وفي لحظة لاحقة $t + \Delta t$ لنفرض أن الكتلة أصبحت $m + \Delta m$ وذلك بعد أن نفث الصاروخ غـازاً (نتائج محروقات) كتلته $-\Delta m$ ، حيث Δm هو مقدار سالب لأن كتلة الصاروخ تتناقص . ولتكن أيضاً $\vec{v}$ و $\vec{v} + \Delta \vec{v}$ سرعة الصاروخ في اللحظتين t و $t + \Delta t$ بالنسبة لجملة عطالية ما ، فاذا كانت $\vec{u}$ سرعة الغاز المنطلق بالنسبة للصاروخ نفسه ، فان سرعة الغـاز بالنسبة للجملة العطالية هي $\vec{u} + \vec{v}$.

والآن يمكننا تطبيق النظرية القائلة أن تغير الاندفاع الخطي خلال الزمن Δt يساوي دفع القوى المؤثرة خلال هذا الزمن . إن الاندفاع الخطي

في اللحظة t هو :

$$\vec{p}\,(t) = m\,\vec{v} \qquad (1)$$

والاندفاع في اللحظة $t + \Delta t$ هو :

$$\vec{p}\,(t + \Delta t) = (m + \Delta m)\,(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + (-\Delta m)\,(\vec{v} + \vec{u}) \qquad (2)$$

أما الدفع فيساوي $\vec{F}\,\Delta t$. بتطبيق النظرية المذكورة نجد :

$$(m + \Delta m)\,(\vec{v} + \Delta\vec{v}) - \Delta m\,(\vec{v} + \vec{u}) - m\,\vec{v} = \vec{F}\,\Delta t$$

وبالاختصار :

$$m\,\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} - \vec{u}\,\frac{\Delta m}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\,\Delta m = \vec{F} \qquad (3)$$

ولما كان الصاروخ ينفث الغاز بشكل مستمر فمن الواجب عندئذ اعتبار الحالة التفاضلية ، أي عندما $\Delta t \to o$ و عندئذ $\Delta m \to o$ ، والعلاقة الأخيرة (3) تأخذ الشكل :

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\,\frac{dm}{dt} = \vec{F} \qquad (4)$$

وهي معادلة حركة الصاروخ .

ويجب أن نلاحظ هنا أن الجملة المدروسة ليست الصاروخ وما فيه من وقود فحسب بل والغاز المنفوث أيضاً . فعندما طبقنا النظرية السابقة طبقناها على كل هذه الأجزاء كمجموعة واحدة ولكن ذات أجزاء (جزأين) تتحرك بسرعات مختلفة .

كما يجب أن نلاحظ أن المعادلة (4) التي تمثل حركة الصاروخ هي معادلة تفاضلية بالنسبة لكل من السرعة والكتلة ، لأن الكتلة تتغير أثناء الحركة . ولحل هذه المعادلة يجب أن نعين أولاً مشتق الكتلة dm/dt . فاذا فرضنا أن كمية الغاز المنفوث (نتائج الاحتراق) في واحدة الزمن ثابتة ، أي أن الغاز ينطلق بمعدل (غزارة) ثابت α ، فان :

$$dm / dt = - \alpha \ , \quad m = m_0 - \alpha t \qquad (5)$$

حيث m_0 كتلة الصاروخ بما فيه في لحظة البدء . وبذلك تصبح المعادلة (4) على الشكل :

$$(m_0 - \alpha t) \frac{d \vec{v}}{d t} - \alpha \vec{u} = \vec{F} \qquad (6)$$

هذه المعادلة عامة ، ولا يوجد فيها أي قيد على القوة أو سرعة الغاز المنفوث ، لا من حيث القيمة الجبرية ولا من حيث الاتجاه . فسرعة نفث الغازات من الصاروخ قد لا توازي سرعته ، أو قد لا تكون مماسة لمساره. ففي معظم الأحيان تستعمل فوهات جانبية في الصاروخ لنفث كميات مختلفة من غازات المحروقات ، وذلك لتغيير اتجاه الصاروخ بأشكال مختلفة .

وخلاصة القول أن المعادلة (6) هي المعادلة العامة لحركة الصاروخ دون أية قيود على القوة أو على السرعة النسبية $\vec{u}$ للغاز المنفوث .

وفي الحالة الخاصة عندما تكون الحركة عمودية ، والسرعة $\vec{u}$ تعاكس $\vec{v}$ بالاتجاه ، نكتب معادلة حركة الصاروخ على الشكل :

$$(m_0 - \alpha t) \frac{dz'}{dt} - \alpha u = - (m_0 - \alpha t) g$$

أو :

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{u\,\alpha}{m_0 - \alpha t} - g \qquad (7)$$

والحل العام لهذه المعادلة هو :

$$z' = u \lg \frac{m_0}{m_0 - \alpha t} - gt \qquad (8)$$

حيث فرضنا أن الصاروخ قد انطلق بدون سرعة بدء من ارتفاع $z_0 = 0$. وهذه العلاقة تعين سرعة الصاروخ في أية لحظة t . وتكامل العلاقة الأخيرة يعطينا موضع الصاروخ .

II — انقسام جسم الى قسمين وحركة كل منهما :

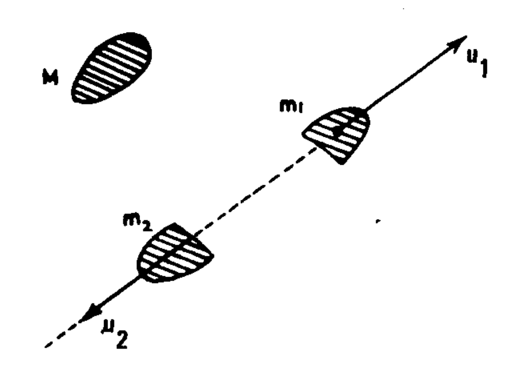
لتكن M كتلة جسم ساكن ، ولنفرض أنه قد انقسم إلى قسمين ، كتلتاهما m_1 و m_2 ، وذلك بتأثير طاقة كانت كامنة فيه ، كطاقة كيميائية أو طاقة انفلات نابض كان مضغوطاً . . الخ .ولتكن E_p هذه الطاقة التي أدت إلى انفصال m_1 عن m_2 . إذا كانت القوى الخارجية المؤثرة على الجسم وجزأيه معدومة فان نظريتي انحفاظ الاندفاع وانحفاظ الطاقة الكلية تعطيان :

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = 0 \qquad (9)$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2 = E_p \qquad (10)$$

حيث $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ سرعتا الجزأين m_1 , m_2 بعد انفصالهما عن بعضهما .

تبين العلاقة الأولى من هاتين العلاقتين أن للسرعتين $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ حاملاً



الشكل (1)

واحداً واتجاهين مختلفين . وحل المعادلتين معاً يؤدي إلى معرفة القيمتين الجبريتين للسرعتين :

$$u_1 = \sqrt{\frac{2\,E_p\,m_2}{m_1\,(\,m_1 + m_2\,)}} \qquad = \sqrt{\frac{2\,E_p}{M} \cdot \frac{m_2}{m_1}} \qquad (11)$$

$$u_2 = -\sqrt{\frac{2\,E_p\,m_1}{m_2\,(\,m_1 + m_2\,)}} \qquad = -\sqrt{\frac{2\,E_p}{M} \cdot \frac{m_1}{m_2}} \qquad (12)$$

لنفرض الآن أن الجسيم كان يسير بسرعة $\vec{v}$ قبل أن ينفصل جزءاه عن بعضهما ، وبعد الانفصال كانت سرعتا الجزأين $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$. لتعيين هاتين السرعتين نطبق نظريتي حفظ الاندفاع وحفظ الطاقة فنجد :

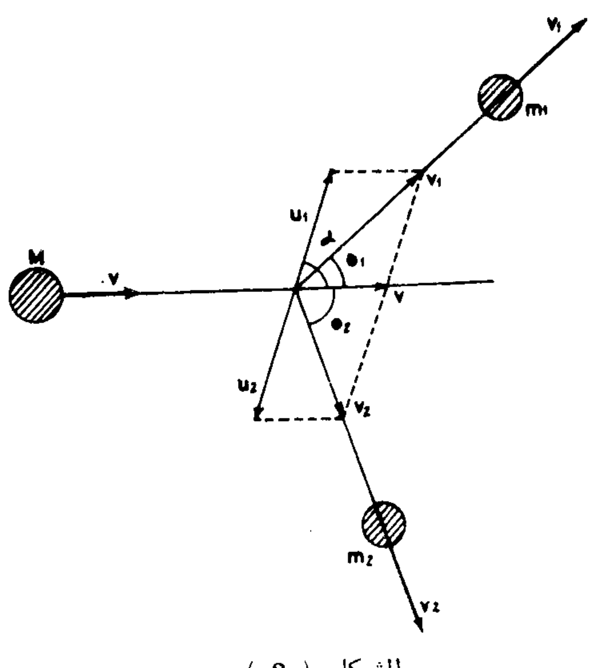
$$m_1\,\vec{v_1} + m_2\,\vec{v_2} = M\,\vec{v}$$

$$\tfrac{1}{2}\,m_1\,v_1^2 + \tfrac{1}{2}\,m_2\,v_2^2 = Ep + \tfrac{1}{2}\,M\,v^2$$

ويمكننا أن نكتب ايضاً :

$$\vec{v_1} = \vec{v} + \vec{u_1} \quad , \quad \vec{v_2} = \vec{v} + \vec{u_2} \qquad (13)$$

حيث $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ السرعتان الناتجتان عن الانقسام .



الشكل (2)

وتصبح العلاقتان السابقتان :

$$m_1(\vec{v}+\vec{u}_1)+m_2(\vec{v}+\vec{u}_2)=M\vec{v} \qquad (14)$$

$$\tfrac{1}{2}m_1(\vec{v}+\vec{u}_1)^2+\tfrac{1}{2}m_2(\vec{v}+\vec{u}_2)^2=Ep+\tfrac{1}{2}M\vec{v}^2 \qquad (15)$$

وبفك الأقواس وملاحظة ان

$$M\vec{v}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$$

تصبح العلاقتان (14) و (15) :

$$m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2=0 \qquad (16)$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2 = Ep \qquad (17)$$

وتعني الأخيرة منها ان الطاقة الـكامنة Ep بعد ان تحررت تحولت إلى طاقة حركية جديدة ناتجة عن السرعتين $\vec{u}_1$ ، $\vec{u}_2$ فقط . كما تعني الأولى ان $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ متعاكستان ولهما نفس الحامل ، ومتناسبتان عكساً مـع كتلتي القسمين المنفصلين m_1 و m_2 .

ومن الواضح ان العلاقتين الأخيرتين تعينان السرعتين u_1 و u_2 ، إلا انهما لا تعينان منحاهما . وتعيين هذا المنحى امر منوط بآلية الانقسام ويجب ان يكون معلوماً بصورة عامة .

سنفرض ان حامل $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ يصنع زاوية α مـع السرعة $\vec{v}$ للجسم قبل الانقسام . وسنعين كلاً من $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ و $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ والزاويتين Θ_1 و Θ_2 اللتين تصنعهما $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ مع $\vec{v}$ بالترتيب .

بحل العلاقتين المترافقتين (16) و (17) نجد ان u_1 و u_2 تعطيان بالعلاقتين (11) و (12) . وبأخذ محورين متعامدين ، احدهما يوازي $\vec{v}$ ، وباسقاط العلاقتين (13) على المحورين نجد :

$$v_1 \cos \Theta_1 = v + u_1 \cos \alpha$$

$$v_1 \sin \Theta_1 = u_1 \sin \alpha$$

$$v_2 \cos \Theta_2 = v - u_2 \cos \alpha$$

$$v_2 \sin \Theta_2 = u_2 \sin \alpha$$

ومن السهل ان نرى من هذه المعادلات ان :

$$v_1 = \sqrt{v^2 + u_1^2 + 2 v u_1 \cos\alpha} \tag{18}$$

$$v_2 = \sqrt{v^2 + u_2^2 - 2 v u_2 \cos\alpha} \tag{19}$$

$$tg\,\Theta_1 = u_1 \sin\alpha / (v + u_1 \cos\alpha) \tag{20}$$

$$tg\,\Theta_2 = u_2 \sin\alpha / (v - u_2 \cos\alpha) \tag{21}$$

وبهذا نكون قد عينا السرعتين $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ تمام التعيين .

III — الصواريخ ذات المراحل المتعددة :

ليكن الصاروخ ذو الكتلة M متحركاً بسرعة v_0 في اللحظة t_0 على مسار مستقيم شاقولي صاعد . ولنفرض انـه بعد ذلك انقسم إلى قسمين كتلتاهما m_1 و m_2 بفعل طاقة كامنة Ep . ولتكن m_2 كتلة الجزء الذي ينبذه الصاروخ . وهذا الجزء هو المحرك النفاث وملحقاتـه التي ادت مهمتها ولم تعد هناك اية حاجة لها . إن قذف هذا الجزء يؤدي إلى التخلص منه من جهة والى زيادة سرعة الصاروخ من جهة اخرى. ويمكننا ان نرى ذلك بتطبيق نظريتي الاندفاع والطاقة . انظر الشكل (3) .

الشكل (3)

يجدر بنا هنا ان نلاحظ ان انفصال المحرك ، الذي ادى مهمته ، وملحقاته يتم خلال فترة قصيرة جداً من الزمن بحيث ان تغير السرع الناتج

عن قوة الجاذبية الارضية صغير جداً يمكن اهماله الى جانب تغير السرع الناتج عن تحول الطاقة الكامنة Ep الى طاقة حركية للجزأين m_1 و m_2 حيث m_1 كتلة الصاروخ و m_2 كتلة المحرك المنفصل .

لذا فان النظريتين المذكورتين تعطيان :

$$M v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \qquad (22)$$

$$\tfrac{1}{2} M v_0^2 + Ep = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \qquad (23)$$

ان حل هاتين العلاقتين ، بعد ملاحظة ان $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ محمولتان على نفس المستقيم الشاقولي ، يؤدي إلى :

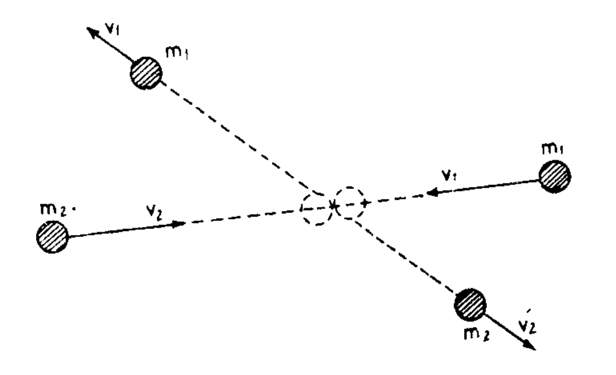
$$v_1 = v_0 + \sqrt{\frac{2\,Ep}{M} \cdot \frac{m_2}{m_1}} \qquad (24)$$

$$v_2 = v_0 - \sqrt{\frac{2\,Ep}{M} \cdot \frac{m_1}{m_2}} \qquad (25)$$

ويجدر بنا ان نلاحظ ان سرعة الصاروخ v_1 بعد انفصال المحرك الذي انتهت مهمته تكبر كلما كان المحرك المنفصل كبيراً ، لأن العلاقة (24) تشير الى ان ازدياد $\vec{v_1}$ يكون بازدياد m_2 ونقصان m_1 . هذا ويمكن استنتاج العلاقتين الأخيرتين (24) و (25) ، من المناقشة التي سبقت في الفقرة « Π » من هذا الفصل ، مع ملاحظة ان $\alpha = o$ وبالتالي $\Theta = o$. انظر العلاقات (11)و(12)و(18) و (19).

IV — قاعدة نيوتن في الاصطدام ـ مرونة الاصطدام :

لتكن m_1 و m_2 كتلتي جسمين ماديين ولتكن $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ سرعتيهما قبل ان يصطدما ببعضها . ثم لتكن $\vec{v'_1}$ و $\vec{v'_2}$ سرعتيهما بعد الاصطدام. تنص قاعدة نيوتن على ان السرعة النسبية قبل الاصطدام وبعده تحقق العلاقة :



الشكل (4)

$$\vec{v}_{12} = -\varepsilon \, \vec{v}_{12} \qquad (26)$$

حيث :

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad \text{و} \quad \vec{v'}_{12} = \vec{v'}_1 - \vec{v'}_2 \qquad (27)$$

وحيث نسمي الثابت ε بثابت مرونة الاصطدام او عامل الرسو .

اذا كانت $\varepsilon = 1$ نقول عن الاصطدام انه مرن تماماً .

واذا كانت $\varepsilon = 0$ نقول عن الاصطدام انه غير مرن .

وفيما عدا ذلك يكون الاصطدام مرناً جزئياً .

V — الاصطدام الرأسي لجسيمين ماديين :

ليكن الجسيمان كرويين ، ولتكن m_1 و m_2 كتلتيهما . يقال عن اصطدامهما انه رأسي اذا كانت سرعتاهما محمولتين على المستقيم الواصل بين مركزيهما . انظر الشكل (5) .

ولدراسة سرعتي الجسيمين بعد الاصطدام يمكن الاستفادة من مبدأ حفظ الاندفاع ، ومن قاعدة نيوتن . وهذان يعطيان الملاقتين :

قبل الاصطدام

m_1 $\vec{v}_1$ .... m_2 $\vec{v}_2$

$\vec{v}_1'$ m_1 ..... m_2 $\vec{v}_2'$

بعد الاصطدام

الشكل (5)

$$\vec{v}_1' - \vec{v}_2' = - \varepsilon (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \quad (28)$$

$$m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \quad (29)$$

ونجد بالحل :

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - \varepsilon m_2)\vec{v}_1 + m_2(1+\varepsilon)\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (30)$$

$$\vec{v}_2' = \frac{m_1(1+\varepsilon)\vec{v}_1 + (m_2 - \varepsilon m_1)\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \quad (31)$$

فسرعة كل من الجسيمين بعد الاصطدام ترتبط بكتلتيهما وسرعتيهما قبل الاصطدام . وبعامل الرسو . وفيما يلي الحالتان الخاصتان للاصطدام تام المرونة والاصطدام عديم المرونة .

1 — الاصطدام المرن (تام المرونة) :

في هذه الحالة تكون $\varepsilon = 1$. ونجد عندئذ :

$$\vec{v}'_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \qquad (32)$$

$$\vec{v}'_2 = \frac{2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \qquad (33)$$

وبحساب الطاقة الحركية بعد الاصطدام نجد :

$$T' = \tfrac{1}{2} m_1 v'^2_2 + \tfrac{1}{2} m_2 v'^2_2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = T \qquad (34)$$

اي ان الطاقة الحركية ثابتة .

ب ـ الاصطدام غير المرن (عديم المرونة) :

في هذه الحالة $\varepsilon = 0$ ، وعندئذ :

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2 = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \qquad (35)$$

اي ان الكتلتين المصطدمتين اصطداماً غير مرن تلتصقان ببعضها وتتابعان الحركة بنفس السرعة . ويؤدي حساب الطاقة الحركية بعد الاصطدام الى :

$$T' = \tfrac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \tfrac{1}{2} m_2 v'^2_2$$
$$= (\tfrac{1}{2} m_1^2 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2^2 v_2^2 + m_1 m_2 v_1 v_2) / (m_1 + m_2) \qquad (36)$$

والفرق بين الطاقتين الحركيتين قبل وبعد الاصطدام هو :

$$\Delta T = T - T' = \tfrac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = \tfrac{1}{2} \mu v_{12}^2 \qquad (37)$$

حيث :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (38)$$

تسمى الكتلة المختزلة للجسمين المتصادمين.

وتدل العلاقة (37) على ان ΔT هو الجزء الضائع من الطاقة الحركية والذي تحول الى حرارة . ونلاحظ ان مثل هذا الضياع لم يحدث قط في حالة الاصطدام المرن .

VI — الاصطدام الجانبي :

اذا لم تكن سرعتا المتحركين محمولتين على خط المركزين سمي اصطدامهما بالاصطدام الجانبي ، وهو كالاصطدام الرأسي يخضع لمبدأ حفظ الاندفاع وقاعدة نيوتن . ولذلك نكتب :

$$m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (39)$$

$$\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 = \varepsilon (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \quad (40)$$

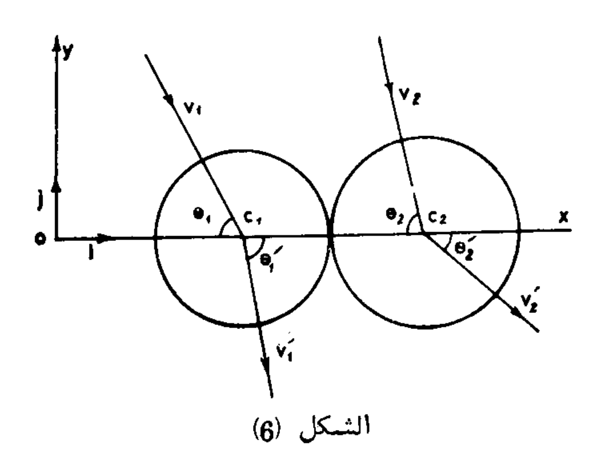
وبالحل نجد :

$$\vec{v}'_1 = \frac{(m_1 - \varepsilon m_2) \vec{v}_1 + m_2 (1 + \varepsilon) \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (41)$$

$$v'_2 = \frac{m_1 (1 + \varepsilon) \vec{v}_1 + (m_2 - \varepsilon m_2) \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (42)$$

لنعتبر جملة مقارنة ثابتة بحيث ينطبق احد محاورها (ox) على خط المركزين في لحظة الاصطدام ، كما في الشكل (6) . لتكن Θ_1 و Θ_2 زاويتي $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ مع ox ولتكن Θ'_1 و Θ'_2 زاويتي $\vec{v'}_1$ و $\vec{v'}_2$ مع ذلك المحور . ان العلاقتين الاخيرتين تعينان السرعتين بعد الاصطدام بشكل شعاعي . ويمكن اشتقاق اربع علاقات مكافئة لهما .

لما كان الاصطدام لا يؤثر الا على مركبة السرعة المحولة على خط



الشكل (6)

المركزين فان مركبة سرعة كل من الجسيمين على oy تحافظ على قيمتها قبل وبعد الاصطدام ، اي :

$$v_1 \sin \Theta_1 = v_1' \sin \Theta_1' \tag{43}$$

$$v_2 \sin \Theta_2 = v_2' \sin \Theta_2' \tag{44}$$

ثم ان السرعتين تكتبان بدلالة الزوايا واشعة الواحدة على الشكل :

$$\vec{v}_1' = v_1' \left(\cos\Theta_1' \vec{i} - \sin \Theta_1' \vec{j} \right) \tag{45}$$

$$\vec{v}_2' = v_2' \left(\cos\Theta_2' \vec{i} - \sin \Theta_2' \vec{j} \right) \tag{46}$$

باسقاط العلاقتين (41) و (42) على ox نجد :

$$v_1' \cos \Theta_1' = \frac{(m_1 - m_2 \varepsilon) v_1 \cos\Theta_1 + m_2(1+\varepsilon) v_2 \cos \Theta_2}{m_1 + m_2} \tag{47}$$

$$v_2' \cos \Theta_2' = \frac{m_1 (1+\varepsilon) v_1 \cos\Theta_1 + (m_2 - m_1 \varepsilon) v_2 \cos\Theta_2}{m_1 + m_2} \tag{48}$$

وبالتعويض في (45) و (46) من (43) و (44) و (47) و (48) نحصل على العلاقتين التاليتين :

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - \varepsilon m_2)\, v_1 + m_2 (1 + \varepsilon)\, v_2 \cos \Theta_2}{m_1 + m_2}\, \vec{i} - \sin\Theta_1\, \vec{j} \qquad (49)$$

$$\vec{v}_2' = \frac{m_1 (1 + \varepsilon) v_1 \cos \Theta_1 + (m_2 - \varepsilon m_1) v_2 \cos \Theta_2}{m_1 + m_2}\, \vec{i} - v_1 \sin\Theta_2\, \vec{j} \qquad (50)$$

ونلاحظ ان العلاقتين الاخيرتين تعينان $\vec{v'}_1$ و $\vec{v'}_2$ بدلالة طويلتي السرعتين $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ قبل الاصطدام ، وزاويتيهما Θ_1 و Θ_2 مع خط المركزين . وهاتان العلاقتان مكافئتان تمام التكافؤ للعلاقتين (41) , (42) .





الفصل التاسع

عزوم العطالة

— تعـاريف

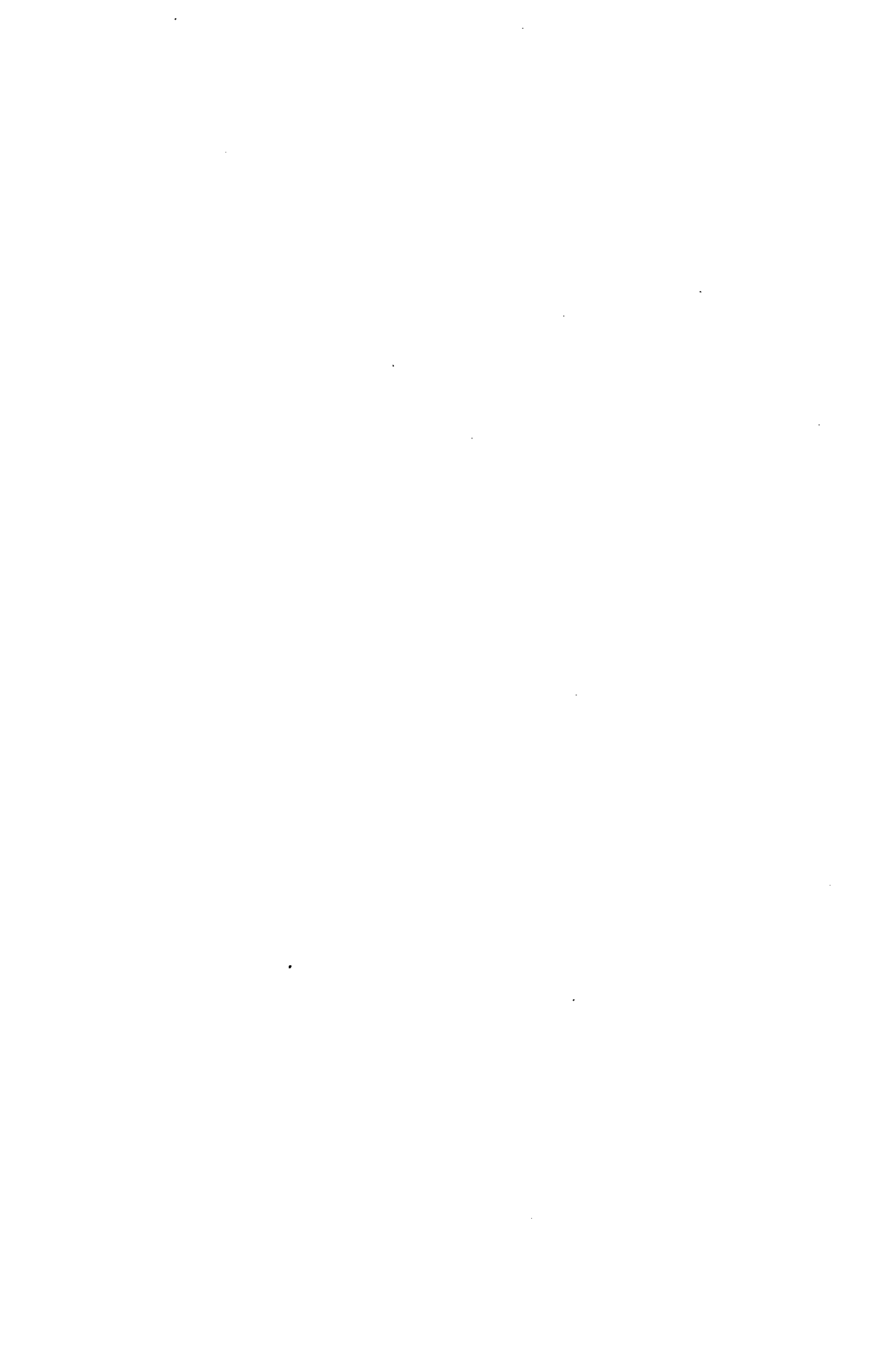
— نظريات عزوم العطالة

— تطبيقات على حساب عزوم العطالة

— عزم عطالة جسم حول محور ما زوايا توجيهه معلومة

— مصفوفة العطالة

— مجسم العطالة



I — تعاريف :

لتكن النقطة O والمستقيم D والمستوي Q . وليكن P جسيماً مادياً كتلته m وأبعـــاده عن O و D و Q هي r و l و h بالترتيب . نسمي المقادير التالية :

$$I_O = m\, r^2 \qquad (1)$$

$$I_D = m\, l^2 \qquad (2)$$

$$I_Q = m\, h^2 \qquad (3)$$

عزوم عطالة الجسم حول النقطة O والمحور D والمستوي Q بالترتيب .

لتكن كذلك P_i مجموعـــة جسيمات مادية كتلها m_i وأبعادها عن النقطة O هي r_i وعن المحور D هي l_i وعن المستوي Q هي h_i ، كما يبـــين الشكل (1) . نسمي المقادير التالية :

الشكل (1)

$$I_O = \sum_i m_i\, r_i^2 \qquad (4)$$

$$I_D = \sum_i m_i\, l_i^2 \qquad (5)$$

$$I_Q = \sum_i m_i\, h_i^2 \qquad (6)$$

عزوم عطالة هذه المجموعـــة حول النقطـة O والمحور D والمستوي Q بالترتيب .

هذا اذا كانت المجموعة المادية متقطعة . أما اذا كانت المجموعة جسماً مستمراً S ، كما يبين الشكل (2) ، فاننا نستطيع أن نقسمه اعتبارياً الى مجموعة أجزاء لامتناهية في الصغر يمثلها العنصر التفاضلي $d\tau$ الذي كتلته :

$$dm = \sigma\, d\tau \qquad (7)$$

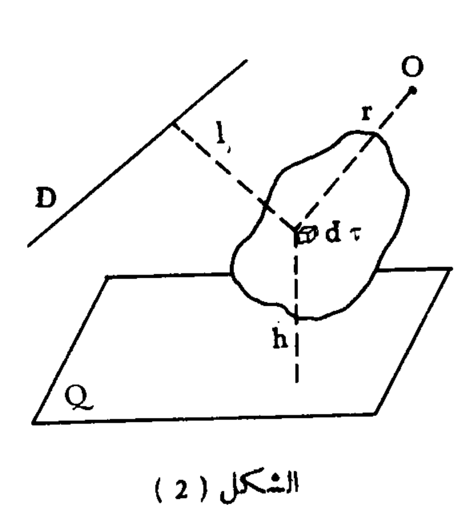
حيث σ كثافة هذا الجسم عند النقطة P . وتكون ابعاد هذا العنصر عن O و P و Q هي أبعاد النقطة P عنها أي r و l و h بالترتيب .

وتصبح عزوم العطالة المعطاة بالعلاقات (4) و (5) و (6) كما يلي :

$$I_O = \int r^2\, dm \qquad (8)$$

$$I_D = \int l^2\, dm \qquad (9)$$

$$I_Q = \int h^2\, dm \qquad (10)$$



الشكل (2)

حيث تحسب التكاملات على جميع الجسم S . ويجدر بالذكر أن الكثافة σ والأبعاد r و l و h كلها تابعة للموضع P بصورة عامة . فاذا كان الجسم حجماً كانت σ الكثافة الحجمية و $d\tau$ عنصراً تفاضلياً حجمياً وكان التكامل بالتالي ثلاثياً . أما اذا كان الجسم سطحاً فان σ الكثافة السطحية و $d\tau$ عندئذ عنصر تفاضلي سطحي ، ويصبح التكامل ثنائياً وأخيراً ، اذا كان الجسم خطاً فالكثافة خطية والعنصر التفاضلي خطي والتكامل أحادي .

تبين العلاقات (4) و (5) و (6) و كذلك العلاقات (8) و (9)

و (10) أن أي عزم عطالة للمجموعة يساوي مجموع عزوم عطالة أجزائها. وملاحظ أن جميع حدود العلاقات المعرفة لعزوم العطالة من طبيعة واحدة هي جداء كتلة بمربع بعد . وهذا الأمر يقترح علينا أن نكتب الطرف الثاني لهذه العلاقات كحد واحد له الطبيعة ذاتها . فاذا اخترنا M لتمثل كتلة المجموعة أو الجسم أمكن عندئذ كتابة العلاقتين (4) و (8) على الشكل التالي :

$$I_O = M\,R_O^2 \qquad (11)$$

حيث نسمي المقدار R_O بنصف قطر العطالة حول النقطة O . وهو يساوي:

$$R_O = \sqrt{I_O / M} \qquad (12)$$

وبشكل مماثل يمكن أن نكتب (5) و (9) كما يلي :

$$I_D = M\,R_D^2 \qquad (13)$$

حيث يكون R_D نصف قطر عطالة الجسم حول المحور D ويعطى بالعلاقة :

$$R_D = \sqrt{I_D / M} \qquad (14)$$

ونكتب أخيراً (6) و (10) بالشكل :

$$I_Q = M\,R_Q^2 \qquad (15)$$

ويكون بالتالي R_Q نصف قطر عطالة الجسم حول المستوي Q ويعطى بالعلاقة :

$$R_Q = \sqrt{I_Q / M} \qquad (16)$$

وفي ذلك كله تحسب كتلة الجسم أو المجموعة من احدى العلاقتين :

$$M = \sum_i m_i \qquad (17)$$

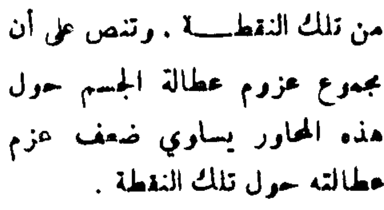
$$M = \int \sigma \, d\tau \qquad (18)$$

وسنرى فيما بعد عند دراسة حركة الجسم الصلب الدورانيــة أن لنصف قطر العطالة معنى وأهمية خاصين .

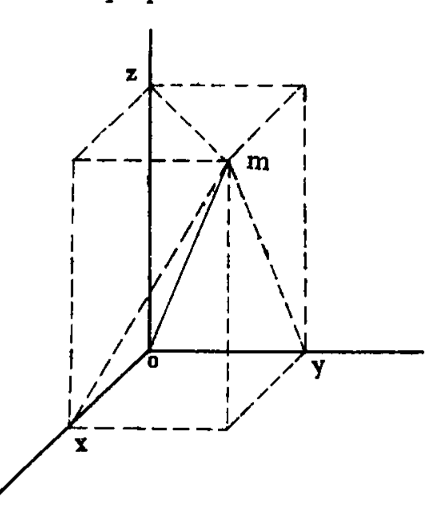
II — نظريات عزوم العطالة :

تخضع عزوم العطالة لنظريات مختلفة نورد فيما يلي أهمها :

آ — **النظرية الاولى** : تحدد هذه النظرية العلاقة بين عزوم عطالة جسم حول نقطة ما وعزوم عطالته حول مجموعة محاور متعامدة فيما بينها ومارة



من تلك النقطـــة . وتنص على أن مجموع عزوم عطالة الجسم حول هذه المحاور يساوي ضعف عزم عطالته حول تلك النقطة .



الشكل (3)

البرهان :

بالاستعانـة بالشكل (3) يمكن أن نكتب عزوم العطـالة حول النقطة o وحول المحاور o x و o y و o z بالشكل التحليلي التالي :

$$I_0 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad \text{أو} \quad \int (x^2 + y^2 + z^2) \, d m \qquad (19)$$

$$I_{ox} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad \text{أو} \quad \int (y^2 + z^2) \, d m \qquad (20)$$

$$I_{oy} = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) \quad \text{أو} \quad \int (z^2 + x^2) \, d m \qquad (21)$$

$$I_{oz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad \text{أو} \quad \int (x^2 + y^2) \, d m \qquad (22)$$

وبجمع العلاقات الثلاث الاخيرة طرفاً الى طرف ومقارنة النتائج بالعلاقة (19) نجد أن :

$$I_{ox} + I_{oy} + I_{oz} = 2 \, I_0 \qquad (23)$$

ومضمون هذه العلاقة مطابق لنص النظرية .

ب - **النظرية الثانية :** تنص هذه النظرية على أن مجموع عزوم الجسم أو المجموعة حول مجموعة مستويات متعامدة في نقطة ما يساوي عزم عطالة هذا الجسم أو هذه المجموعة حول تلك النقطة .

البرهان :

يتم البرهان على صحة هذه النظرية ايضاً بالشكل (3) وكتابة عزوم العطالة المعنية بأشكالها التحليلية :

$$I_{oxy} = \sum_i m_i z_i^2 \quad \text{أو} \quad \int z^2 \, dm \qquad (24)$$

$$I_{oyz} = \sum_i m_i x_i^2 \quad \text{أو} \quad \int x^2 \, dm \qquad (25)$$

$$I_{ozx} = \sum_i m_i y_i^2 \quad \text{أو} \quad \int y^2 \, dm \qquad (26)$$

بجمع هذه العلاقات ومقارنة المجموع بالعلاقة (19) نجد أن :

$$I_{oxy} + I_{oyz} + I_{ozx} = I_0 \qquad (27)$$

حيث أن مضمون هذه العلاقة مطابق لنص النظرية .

جـ – النظرية الثالثة : تنص هذه النظريـة على أن مجموع عزوم عطالة جسم أو مجموعة حول ثلاثة محاور متعامده في نقطة يساوي ضعف مجموع عزوم العطالة حول المستويات المتعامدة والمتقاطعـة مثنى مثنى وفق تلك المحاور . وتعتبر هذه النظرية نتيجة مباشرة للنظريتين السابقتين ، حيث أن مقارنتهما تؤدي الى العلاقة :

$$I_{ox} + I_{oy} + I_{oz} = 2 (I_{oxy} + I_{oyz} + I_{ozx}) \qquad (28)$$

وهو مضمون النظرية .

د – النظرية الرابعة : تعرف هذه النظرية بنظرية المحاور المتعامدة. وتنص على أنه اذا كان الجسم مستوياً فان عزم عطالته حول محور o z متعامد معه يساوي مجموع عزمي عطالته حول محورين o x و o y متعامدين فيما بينهما ومع المحور o z وواقعين في مستوي الجسم .

البرهان :

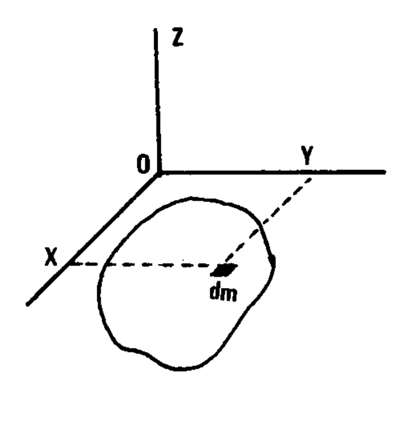
يبـــين الشكل (4) الجسم المستوي والمحاور المعنية ox و oy و oz . ويتضح من الشكل أن :

$$I_{oz} = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

$$= \int x^2\, dm + \int y^2\, dm$$

$$= I_{oy} + I_{ox} \qquad (29)$$

وهذا مطابق لمضمون النظرية .

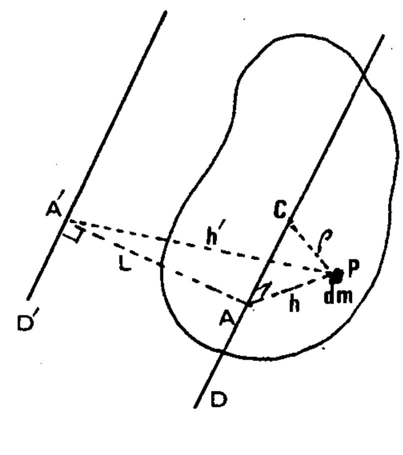


الشكل (4)

هـ - النظرية الخامسة : وتعرف هذه النظرية بنظرية المحاور المتوازيـة أو نظريــــة هويغنز . وتنص على أن عزم عطالة جسم حول محور ما 'D يساوي عزم عطالتــــه حول محور D يوازي 'D ويمر من مركز كتلة الجسم مضافاً اليه جداء كتلة الجسم بمربع البعد بين المحورين .

البرهان :

ليكن 'I عزم عطالة الجسم حول المحور 'D وليكن I عزم عطالتـه حول المحور D . وليكن L البعد بـين المحورين و C مركز كتلة الجسم و M كتلته وليكن d m عنصر الكتلة عند النقطة P على بعد h من D وعلى بعد 'h من 'D ، كما يبين الشكل (5) .



الشكل (5)

ان العزم حول D' يكتب كما يلي :

$$I' = \int (\vec{h'})^2 \, dm$$

$$= \int (\vec{h} + \vec{L})^2 \, dm$$

$$= \int h^2 \, dm + \int L^2 \, dm$$

$$+ 2 \int \vec{L} \cdot \vec{h} \, dm$$

$$= I + M L^2 + 2 \int \vec{L} \cdot \vec{h} \, dm \qquad (30)$$

ويمكن أن نبرهن أن التكامل الاخير معـــدوم عن طريق استعمال مركز الكتلة حيث يمكن أن نكتبه كما يلي :

$$\int \vec{L} \cdot \vec{h} \, dm = \int \vec{L} \cdot (\vec{AC} + \vec{\rho}) \, dm$$

$$= \vec{L} \cdot \vec{AG} \int dm + \vec{L} \cdot \int \vec{\rho} \, dm$$

ان التكامل الاول معدوم لتعامد $\vec{L}$ و $\vec{AC}$ والتكامل الثاني معـــدوم حسب خواص مركز الكتلة . وتصبح العلاقة (30) :

$$I' = I + M L^2 \qquad (31)$$

وذلك هو ما يفيده نص النظرية .

III – تطبيقات على حساب عزوم العطالة :

آ – عزم عطالة مستطيل متجانس حول أحد أضلاعه وحول رؤوسه:

ليكن المستطيل O A C B وليكن ضلعـــاه a = O A و O B = b .
لحسب عزوم عطالته حول ضلعيه وأحد رؤوسه بالاستعانة بالشكل(6):

$$I_{ox} = \int y^2 \, dm$$

$$= \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b} \sigma y^2 \, dx \, dy$$

$$= \frac{\sigma a b^3}{3} = \frac{M b^2}{3} \qquad (32)$$

الشكل (6)

وبمثل ذلك نجد عزم العطالة حول الضلع الاخر :

$$I_{oy} = \frac{\sigma a^3 b}{3} = \frac{M a^2}{3} \qquad (33)$$

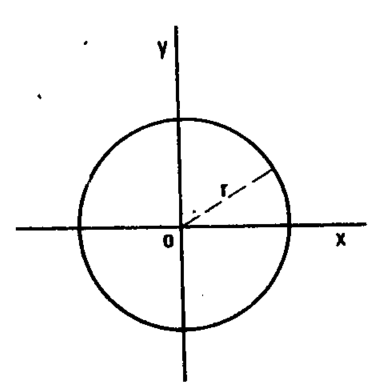
أما عزم العطالة حول الرأس o وهو نفسه عزم العطالة حول المحور o z المتعامد معـه فيساوي مجموع العزمين السابقين حول الضلعين وذلك حسب النظرية الرابعة . أي :

$$I_0 = I_{oz} = \frac{\sigma a b}{3} (a^2 + b^2) = \frac{M}{3} (a^2 + b^2) \qquad (34)$$

ب – عزم عطالة حلقة متجانسة حول قطرها :

بسبب التناظر والتماثل فان :

$$I_{ox} = I_{oy}$$



وحسب النظرية الرابعة :

$$I_o = I_{ox} + I_{oy} = 2\, I_{ox}$$

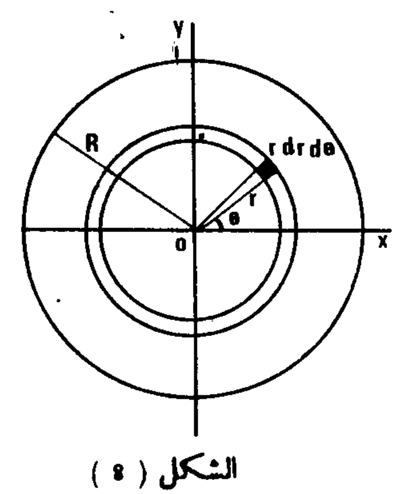
وبما أن جميع نقاط الحلقة على بعد واحد من o فان عزم المطالة حول o هو $M\, r^2$ ومنه :

$$I_{ox} = \frac{M\, r^2}{2} \qquad (35)$$

الشكل (7)

حيث r نصف قطر الحلقة و M كتلتها كا في الشكل (7) .

ج – عزم عطالة قرص دائري متجانس حول أحد أقطاره :



للاسباب الواردة في (ب) من هذه الفقرة نرى أن :

$$I_{ox} = \tfrac{1}{2}\, I_0$$

فاذا اعتبرنا الاحداثيات القطبية r و θ في الشكل (8) كان عنصر السطح :

$$d\tau = r\, d\theta\, dr$$

الشكل (8)

ويكون عزم المطالة حول o مساوياً ما يلي :

$$I_0 = \int r^2 \, d\, m$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \sigma\, r^3 \, d\, r\, d\, \theta$$

$$= \frac{\sigma\, \pi\, R^4}{2} = \frac{M\, R^2}{2}$$

ومنه :

$$I_{ox} = \tfrac{1}{2}\, I_0 = \frac{M\, R^2}{4} \qquad (36)$$

د – عزم عطالة كرة جوفاء حول قطرها :

حسب النظرية الاولى واعتماداً على أن عزوم المطالة متساوية حول جميع الاقطار نرى أن :

$$I_{ox} = \frac{2}{3}\, I_0 = \frac{2}{3}\, M\, R^2 \qquad (37)$$

هـ – عزم عطالة كرة صماء حول قطرها :

يمكن دون اللجوء الى شكل هندسي مرسوم أن نتخيل كرة جوفاء عنصرية مركزها مركز الكرة ونصف قطرها r وسماكتها d r حيث تكون كتلتها :

$$d\, m = 4\, \pi\, r^2\, \sigma\, d\, r$$

ان عزم عطالة هذه الكرة المنصرية حول o هو :

$$d\,I_0 = 4\,\pi\,\sigma\,r^4\,d\,r$$

ولحصل بتكامل هذا المقدار على عزم العطالة الكلي للكرة الصماء كاملة حول o . أي :

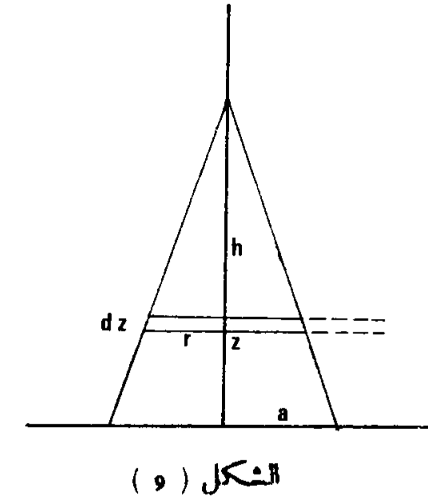
$$I_0 = \int_0^R 4\,\pi\,r^4\,d\,r = \frac{3}{5}\,M\,R^2$$

ويكون عزم العطالة حول أحد الاقطار :

$$I_{ox} = \frac{2}{3}\,I_0 = \frac{2}{5}\,M\,R^2 \qquad (38)$$

و - عزم عطالة مخروط دوراني حول محوره :

ليكن h ارتفاع المخروط و a نصف قطر قاعدته الدائرية وذلك كما يبين الشكل (٩) الذي يمثل مقطعاً ماراً من المحور . ولنعتبر كعنصر تفاضلي شريحة دائرية موازية للقاعدة على بعد z منها وذات سماكة d z ونصف قطر r . ان عزم عطالة هذه الشريحة الدائرية حول المحور ، حسب (حـ) من هذه الفقرة ، يساوي نصف كتلتها بمربع نصف قطرها . أي :



الشكل (٩)

$$d\,I_{oz} = \tfrac{1}{2}\,(\sigma\,.\,\pi\,r^4\,d\,z) \qquad (39)$$

ويكون عزم عطالة المخروط حول o z مساوياً لتكامل هذا المقدار أي :

$$I_{oz} = \int \tfrac{1}{2} \sigma \pi r^4 \, dz$$

لكن الشكل يبين أن :

$$\frac{r}{a} = \frac{h - z}{h} \qquad \text{أو} \qquad r = a \, \frac{h - z}{h}$$

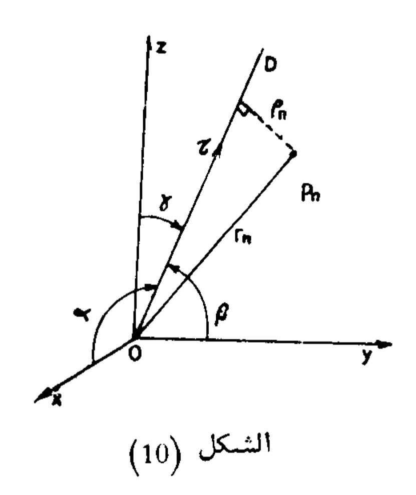
ومنه :

$$I_{oz} = \int_{z=0}^{h} \frac{1}{2} \sigma \pi a^4 \left(\frac{h - z}{h} \right)^4 dz = \frac{3}{10} M a^2 \qquad (40)$$

حيث M كتلة المخروط .

IV — عزم عطالة جسم حول محور ما زوايا توجيهه معلومة :

ليكن الجسم S والمحور D الذي يراد حساب عزم العطالة حوله . ولتكن α و β و γ الزوايا التي يصنعها هذا المحور مع المحاور الاحداثية ox و oy و oz والتي تسمى بزوايا توجيه المحور D .



الشكل (10)

لتكن P_n نقطة من الجسم ولتكن x_n ، y_n ، z_n احداثياتها و $\vec{r}_n$ شعاع موضعها . فاذا كانت ϱ_n بعدها عن المستقيم D الذي شعاع واحدته $\vec{\tau}$ فان عزم عطالة هذه النقطة بالنسبة لهذا المحور يعطى بالعلاقة :

$$I_n = m_n \varrho_n^2 \qquad (41)$$

ولكن :

$$\varrho_n^2 = (\vec{r}_n \wedge \vec{\tau})^2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_n & y_n & z_n \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}^2 \qquad (42)$$

وبنشر هذه العلاقة والتعويض في (41) نجد :

$$\begin{aligned} I_n = m_n \Big[& (y_n^2 + z_n^2)\cos^2\alpha + (z_n^2 + x_n^2)\cos^2\beta \\ & + (x_n^2 + y_n^2)\cos^2\gamma - 2x_n y_n \cos\alpha\cos\beta \\ & - 2 y_n z_n \cos\beta\cos\gamma - 2z_n x_n \cos\alpha \cos\gamma \Big] \qquad (43) \end{aligned}$$

إن عزم عطالة الجسم حول المحور D هو مجموع عزوم عطالة جميع نقاطه حول هذا المحور ولذلك فانه ينتج بجمع العزوم الممثلة بالعلاقة (43). يؤدي ذلك إلى العلاقة :

$$\begin{aligned} I = \sum_n I_n = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma + 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta \\ + 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha \qquad (44) \end{aligned}$$

حيث :

$$I_{xx} = \sum_n m_n (y_n^2 + z_n^2) \qquad (45)$$

$$I_{yy} = \sum_n m_n (z_n^2 + x_n^2) \qquad (46)$$

$$I_{zz} = \sum_n m_n (x_n^2 + y_n^2) \qquad (47)$$

هي بالترتيب عزوم عطالة الجسم حول المحاور ox و oy و oz وحيث :

$$I_{xy} = - \sum_{n} m_n \, x_n \, y_n = I_{yx} \qquad (48)$$

$$I_{yz} = - \sum_{n} m_n \, y_n \, z_n = I_{zy} \qquad (49)$$

$$I_{zx} = - \sum_{n} m_n \, z_n \, x_n = I_{xz} \qquad (50)$$

تسمى بمضاريب العطالة ، وقد تضمنت الاشارة السالبة لتلافي حمل هذه الاشارة في العلاقة الرئيسية (44) .

V — مصفوفة العطالة :

تسمى المصفوفة التي حدودها هي عزوم عطالة الجسم ومضاريب عطالته بمصفوفة العطالة . وتكتب على الشكل التالي :

$$(I) = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \qquad (51)$$

ولهذه المصفوفة اهمية كبرى في دراسة الحركة العامة للجسم الصلب وسنرى ذلك في حينه . ويجدر بنا أن نلاحظ أنَ حدود القطر الرئيسي لهذه المصفوفة مؤلفة من عزوم العطالة حول المحاور الاحداثية وأن بقيــة الحدود متناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي .

VI — مجسم العطالة :

إن العلاقة (44) تعطي عزم عطالة الجسم حــول محور ما بدلالة عزوم العطالة حــول المحاور الاحداثيــة وزوايا توجيه المحور α , β , γ . ومن الطبيعي أن نرى أن هذا العزم يتغير بتغير الزوايا أي بتغير المحور D .

وسنحــاول فــيما يلي ربط عزم العطالة I بشعاع ϱ محمول على D ومعرّف بالعلاقتين :

$$\vec{\varrho} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k} \qquad (52)$$

$$\vec{\varrho} = \vec{\tau} / \sqrt{I} \qquad (53)$$

من هاتين العلاقتين نجد مركبات الشعاع $\vec{\varrho}$ على المحاور ox ، oy ، oz وهي :

$$a = \cos\alpha / \sqrt{I} \;,\; b = \cos\beta / \sqrt{I} \;,\; c = \cos\gamma / \sqrt{I} \qquad (54)$$

بتقسيم طرفي العلاقة (44) على I والتعويض فيها من العلاقة (54) نجد :

$$I_{xx}\,a^2 + I_{yy}\,b^2 + I_{yy}\,c^2 + 2\,I_{xy}a\,b + 2\,I_{yz}bc + 2\,I_{zx}ca = 1 \qquad (55)$$

ومن الواضح أن هذه العلاقة تمثل قطعاً ناقصاً مجسماً لا تنطابق محاوره بصورة عامة على المحاور الاحداثية ox ، oy ، oz لوجود الحدود التي تحتوي على الجداءات المختلطة ab ، bc ، ca للمتحولات a ، b ، c . نسمي هذا القطع « مجسم المطالة » . ونلاحظ أن رأس الشعاع $\vec{\varrho}$ الذي احداثياته a ، b ، c يقع دوماً على هذا الجسم مهما كانت هذه الاحداثيات .

وأخيراً يمكن الحصول على عزم المطالة حول محور يحمل $\vec{\tau}$ او $\vec{\varrho}$ من العلاقة (53) التي تكتب على الشكل :

$$I = \tau^2 / \varrho^2 = \frac{1}{\varrho^2} \qquad (56)$$

حيث يمكن ايجاد ϱ^2 من مجسم المطالة .

الفصل العاشر

الحركة المستوية للجسم الصلب

- الحركة الانسحابية المستوية
- الدوران حول محور ثابت
- الحركة المستوية العامة للجسم الصلب
- درجات الحرية
- النظريات الاساسية في حركة الجسم الصلب حول محور
- تطبيق : دراسة النواس المركب
- الحركة المستوية العامة للجسم الصلب
- تطبيق : حركة اسطوانة دائرية على مستو مائل
- المركز الآني للدوران والمحور الآني للدوران
- تطبيق على تدحرج اسطوانة على مستو مائل
- توازن الجسم الصلب
- تطبيق

عرفنا الجسم الصلب سابقاً بأنه الجسم الذي تحافظ جميع نقاطه على ابعادها النسبية فيما بينها . هذا وتنطبق على الجسم الصلب جميع الدراسات والنظريات التي أتينا عليها سابقاً . سنتعرض في الفصول القادمة إلى الدراسة العامة لحركة جسم صلب في الفراغ . أما الآن فسيقتصر بحثنا على دراسة حركته المستوية أي تلك التي تحدث عندما تتحرك جميع نقاطه في مستويات متوازية . وتتألف هذه الحركة بصورة عامة من نوعين من الحركات .

١ – إنسحاب .

٢ – دوران حول محور ثابت .

I – الحركه الانسحابية المستوية :

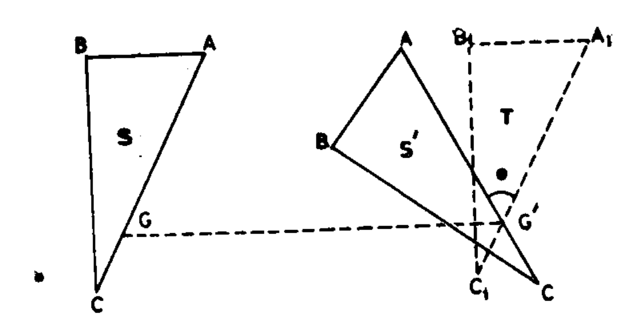
نقول عن الجسم الصلب أنه يتحرك حركة مستوية إنسحابية فيما إذا كانت كل نقطة منه تتحرك في مستو ثابت وكان المستقيم الواصل بين أي نقطتين من الجسم موازياً لنفسه في جميع أوضاع الجسم . ومسارات نقاط الجسم هي عندئذ منحنيات متوازية واقعة في مستويات متوازية .

II – الدوران حول محور ثابت :

يمكن أن نتبين بسهولة أنه في حركة الجسم الصلب حركة دورانية حول محور ثابت بالنسبة للجسم تبقى جميع نقاط الجسم على مسافات ثابتة من ذلك المحور .

III — الحركة المستوية العامة للجسم الصلب :

في الحالة العامة للحركة المستوية للجسم الصلب لا نجد نوعاً واحداً من الحركة . فهي ليست انسحاباً فقط ولا دوراناً فقط . ويمكن أن نرى من المثال التالي أن هذه الحركة العامة يمكن أن تتحلل إلى حركة انسحابية وحركة دورانية حول محور متماسك مع الجسم الصلب . ينتقى هذا المحور عادة بحيث يمر من مركز كتلة الجسم المتحرك . ولهذا الاختيار فضل في تبسيط الدراسة الكمية للحركة . ومع ذلك فلن نشترط ذلك في المثال التالي .



الشكل (1)

ليكن ABC مثلثاً رؤوسه النقاط الثابتة A ، B ، C من الجسم والواقعة في مستو يوازي مستوى الحركة الثابت كما في الشكل (1) . ولنفرض أن الجسم قد انتقل من الوضع S الى الوضع S′ خلال فترة زمنية قصيرة فالحركة التي تمت بين الوضعين يمكن أن نحللها إلى حركتين :

١ — إنتقال الجسم من الوضع S إلى الوضع T بحيث بقي الجسم موازياً لنفسه وتحرك حركة انسحابية مستقيمة .

٢ — دوران حول محور يمر من نقطة ثابتة G′ ناظمياً على مستوي الحركة . ومقدار هذا الدوران يتحدد بالزاوية الكائنة بين وضعي أي ضلع من أضلاع المثلث في الوضعين S′ و T .

IV — درجـات الحريـة :

لما كان وضع الجسم في الحركة الانسحابية يتعين بنقطة واحدة وهذه الاخيرة لها درجتان من الحرية في الحركة المستوية فاننا نستنتج أن للحركة الانسحابية المستوية درجتان من الحرية أيضاً .

أما بالنسبة للدوران حول محـور ثابت فان هناك درجة حرية واحدة لأن وضع الجسم الدائر يتعين بزاوية الدوران « متحول واحد » .

نستنتج من ذلك أن الحركة المستوية العامة للجسم الصلب ذات ثلاث درجات من الحرية لتركيبها من الحركتين السابقتين .

V — النظريات الاساسية في حركة الجسم الصلب حول محور :

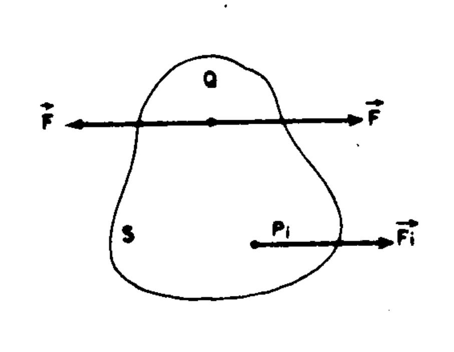
سنتناول في هذه الفقرة النظريات الأساسية التي تساعدنا على دراسة الحركة المستوية العامة للجسم الصلب .

١ — نظريـة المزدوجات :

إذا أثرت مجموعة من القوى في جسم صلب فان هذه المجموعة يمكن أن ترد الى مجموعة مكافئة مؤلفة من قوة وحيدة تؤثر في نقطة معينة ومزدوجة مناسبة .

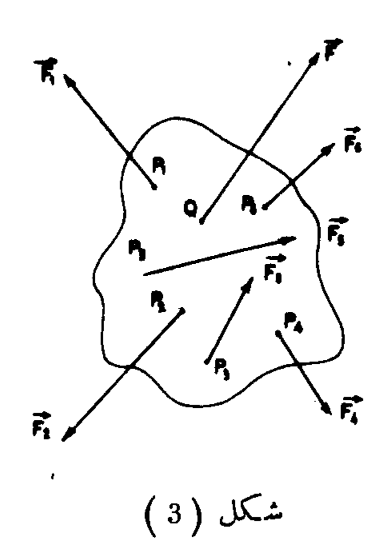
البرهان : لتكن $\vec{F_i}$ القوة المؤثرة في النقطة $\vec{P_i}$ من الجسم . ولنختر نقطة ما Q من الجسم أيضاً . ان وضع الجسم الحركي لا يتغير إذا أضفنا قوتين متماكستين $\vec{F}$ و $-\vec{F}$ مؤثرتين في نفس النقطة Q ، لأن إحداهما تعطل الأخرى ، الشكل (2) . ونرى بسهولة ان القوة $\vec{F_i}$ « المؤثرة في P_i » تكافيء عندئذ مجموعة القوى $\vec{F_i}$ المؤثرة في P و $\vec{F}$ و $-\vec{F}$ « المؤثرتين في Q » . فاذا اخترنا $\vec{F_i} = \vec{F}$ اصبحت المجموعة المذكورة مؤلفة من القوة $\vec{F_i}$

المؤثرة في P_i والقوتين $\vec{F_i}$ و $\vec{F_i}$ — المؤثرتين في Q .
فاذا اعتبرنا $\vec{F_i}$ المؤثرة في P_1 و $\vec{F_i}$ — المؤثرة في Q كمزدوجة فان المجموعة تكافيء قوة $\vec{F_i}$ مؤثرة في Q ومزدوجة $\vec{F_i}$ و $\vec{F_i}$ — عزمها يساوي $\vec{QP} \wedge \vec{F_i}$. فالقوة $\vec{F_i}$ قد ردت إلى قوة ومزدوجة



الشكل (2)

فاذا طبقنا نفس الفكرة على جميع القوى $\vec{F_i}$ الممثلة في الشكل (3) فانها عندئذ تكافيء مجموع القوى $\vec{F_i}$ المؤثرة في Q مضافاً اليها مزدوجة عزمها يساوي مجموع عزوم المزدوجات المقابلة . اي ان مجموعة القوى $\vec{F_i}$ قد ردت



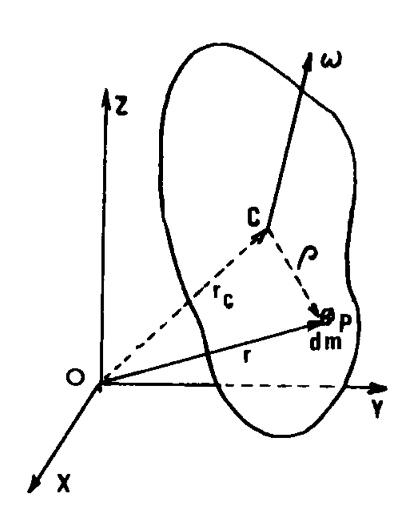
شكل (3)

إلى قوة وحيدة $\vec{F} = \sum_i \vec{F_i}$ تؤثر في النقطة المختارة Q ومزدوجة عزمها

$$\vec{\Lambda} = \sum \vec{QP_i} \wedge \vec{F_i}$$

وهكذا فقد امكن رد مجموعة القوى الى قوة وحيدة ومزدوجة مناسبتين .

ب ـــ نظرية الطاقة الحركية :



شكل (4)

الطاقة الحركية لجسم صلب مركز كتلته C وعزم عطالته حول محور مار من C تساوي مجموع الطاقة الحركية لمركز كتلته والجداء $\frac{1}{2} I \omega^2$ حيث ω السرعة الدورانية حول ذلك المحور أي :

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (1)$$

البرهان : ليكن الجسم الصلب S المتحرك بالنسبة للجملة oxyz كما في الشكل (4). ان الطاقة الحركية للجسم هي :

$$T = \int \frac{1}{2} r'^2 \, dm = \frac{1}{2} \int (\vec{r'})^2 \, d\, m = \frac{1}{2} \int (\vec{\varrho'} + \vec{r'_c})^2 \, dm \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} r'^2_c \int dm + \frac{1}{2} \int \varrho'^2 \, d\, m + \int \vec{\varrho'} . \vec{r'_c} \, d\, m \quad (3)$$

ان الحد الاول من الطرف الايمن يساوي

$$\frac{1}{2} \int r'^2_c \, dm = \frac{1}{2} m r'^2_c = \frac{1}{2} m\, v_c^2 \quad (4)$$

أما الحد الثاني فيساوي

$$\frac{1}{2}\int_{s} \varrho'^2\, dm = \frac{1}{2}\int_{s} (\varrho\,\omega)^2\, dm = \frac{1}{2}\,\omega^2\int_{s}\varrho^2\, dm = \frac{1}{2}\, I\omega^2 \qquad (5)$$

اما الحد الثالث فهو معدوم لأن

$$\frac{1}{2}\int_{s} \vec{\varrho'}\cdot\vec{r'}_c\, dm = \frac{1}{2}\,\vec{r'_o}\cdot\int_{s}\vec{\varrho}\cdot dm = o \qquad (6)$$

اذاً :

$$T = \frac{1}{2}\, m\, v_c^2 + \frac{1}{2}\, I\,\omega^2 \qquad (7)$$

وهي العلاقة المطلوب البرهان على صحتها .

ويجب ان نلاحظ ان الطاقة الحركية للجسم الناتجة عن دورانه حول محور ما هي :

$$\frac{1}{2}\, I\,\omega^2 \qquad (8)$$

حيث I عزم عطالته حول هذا المحور و ω السرعة الزاوية للدوران .

حـ ـــ نظرية الطاقة الكليـــة :

إن هذه النظرية تعتمد على مبـدأ انخفـاظ الطاقة . فاذا كانت القوى المؤثرة في الجسم مشتقة من كمون كانت الطاقة الكلية $E = T + V$ ثابتة اي محفوظة وتكتب عندئذ هذه العلاقة على الشكل التالي :

$$\frac{1}{2}\, m\, v_c^2 + \frac{1}{2}\, I\,\omega^2 + V = E \text{ ثابت} \qquad (9)$$

وقبل تطبيق هذه النظرية التي تعد من اهم نظريات حركة الجسم الصلب يجب التأكد من أن الطاقة محفوظة .

د ـــ نظريـــة الاندفاع الزاوي :

اذا كان الجسم المتحرك يدور حول محور ثابت وكانت I عزم عطالته

حول ذلك المحور فان الاندفاع الزاوي للجسم يساوي

$$\vec{\Omega} = I \vec{\omega} \tag{10}$$

البرهان : يعطى الاندفاع الزاوي للجسم حول محور الدوران بالعلاقة

$$\vec{\Omega} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i \quad \text{او} \quad \vec{\Omega} = \int \vec{r} \wedge \vec{v}\, dm \tag{11}$$

حيث كل من الصيغتين تكافيء الأخرى وحيث r_i يمثل بعد النقطة i عن محور الدوران . ولما كانت حركة كل نقطة من الجسم هي حركة دائرية مركزها واقع على محور الدوران فان :

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i \tag{12}$$

وعندئذ يكون لدينا :

$$\vec{\Omega} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) = \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) \tag{13}$$

ولكن بصورة عامة :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C}) \vec{B} - (\vec{A}.\vec{B}) \vec{C} \tag{14}$$

إذن :

$$\vec{\Omega} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \omega - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) r_i \tag{15}$$

أو :

$$= \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega} \tag{16}$$

وهي العلاقة التي كنا نسعى وراء البرهان على صحتها . ونلاحظ أن الحد

الأخير من العلاقة (15) معدوم لتعامد $\vec{r}_i$ مع $\vec{\omega}$ الأمر الذي يجعل الجداء الداخلي لهما معدوماً .

هـ ـــ نظرية عزم القوى :

إن العزم الكلي حول محور الدوران للقوى المؤثرة في الجسم الدائر بتأثيرها

$$\vec{\Lambda} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\omega}' = I \vec{\alpha} \tag{17}$$

حيث $\vec{\alpha}$ يمثل التسارع الزاوي .

البرهان : لقد رأينا سابقاً أن الاندفاع الزاوي وعزم القوى المؤثرة يرتبطان ببعضهما في الحالة العامة بالعلاقة :

$$\vec{\Lambda} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$

إن استعمال العلاقة (10) في العلاقة الأخيرة وإدراك أن عزم العطالة ثابت يؤديان إلى العلاقة المطلوبة أي :

$$\vec{\Lambda} = \frac{d}{dt}\left(I\vec{\omega}\right) = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

و ـــ نظرية العمل العنصري :

إن العمل العنصري الذي تنجزه القوى المطبقة على مختلف نقاط الجسم خلال فترة زمنية قصيرة dt التي ترافقها تغيرات dr_i في مواضع نقاط الجسم هذا العمل يعطى بالعلاقة :

$$dW = \Lambda\,\omega\,dt = \Lambda\,d\Theta \tag{20}$$

حيث :

$$\omega = d\Theta / dt$$

البرهان : يمكن كتابة العمل المنجز على الشكل :

$$dW = \sum_i dW_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} dt$$

$$= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \, dt = \sum_i \vec{F}_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) \, dt \qquad (21)$$

ومن خواص الجداء المختلط للأشعة نجد :

$$dW = \sum_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i) \, dt = \sum_i \vec{\omega} \cdot \vec{\Lambda}_i \, dt$$

$$= \sum_i \omega \, \Lambda_i \, dt = \omega \, \Lambda \, dt = \Lambda \, d\Theta$$

وهي العلاقة (20) المطلوبة .

ويجدر أن نلاحظ ان الاستطاعة عندئذ هي :

$$P = dW / dt = \Lambda \, \omega$$

ز ـــ نظرية العمل الكلي :

إن العمل الكلي الذي تنجزه القوى المؤثرة على الجسم الدائر حول محور بين وضعين مختلفين يعطى بالعلاقة :

$$W = \tfrac{1}{2} I \omega_2^2 - \tfrac{1}{2} I \omega_1^2 \qquad (24)$$

حيث ω_1 ، ω_2 قيمتا السرعة الزاوية في الوضعين الأول $(t_1 ، \Theta_1)$ والأخير $(t_2 ، \Theta_2)$.

البرهان : نحصل على العمل الكلي بتكامل العمل العنصري المعطى بالعلاقة (20) وذلك بين الوضعين المختلفين إذن :

$$W = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \Lambda \, d\Theta = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} I \, \omega \, d\Theta = \int_{t_1}^{t_2} I \, \frac{d\omega}{dt} \, d\Theta \qquad (25)$$

$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} I \omega \, d\omega = \tfrac{1}{2} I \omega_2^2 - \tfrac{1}{2} I \omega_1^2$$

وهي العلاقة المطلوبة .

ملاحظة : كان بامكاننا أن نبرهن على صحة هذه النظرية بطريقة مباشرة تعتمد على أن العمل المنجز يساوي الفرق بين الطاقتين الحركيتين أي :

$$W = T_2 - T_1$$

وفي حالة الدوران حول محور تأخذ T_2 , T_1 القيمتين $\tfrac{1}{2} I \omega_1^2$ و $\tfrac{1}{2} I \omega_2^2$. وهذا يؤدي مباشرة الى العلاقة (24) المطلوبة .

ح ـــ نظرية انحفاظ الاندفاع الزاوي :

إذا كانت القوى المؤثرة على الجسم معدومة فان الاندفاع الزاوي محفوظ .

البرهان : لما كان عزم القوى $\vec{\Lambda}$ معدوماً في حالة القوى المعدومة ولما كانت :

$$\vec{\Lambda} = \frac{d}{dt} \vec{\Omega} \qquad (28)$$

فاننا نستنتج ان $d \vec{\Omega} / dt = 0$ ومنه :

$$\vec{\Omega}_2 = \vec{\Omega}_1 \qquad (27)$$

اي ان الاندفاع الزاوي محفوظ .

ط ـــ نظرية الدفع الزاوي :

الدفع الزاوي الناتج عن القوى اثناء الدوران بين وضعين مختلفين للجسم يساوي

الفرق بين قيمتي الاندفاع الزاوي في الوضعين اي :

$$\vec{J_a} = \vec{\Omega_2} - \vec{\Omega_1} \qquad (28)$$

البرهان : يعرف الدفع الخطي بين لحظتين t_1 ، t_2 بأنه :

$$\vec{J_1} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt$$

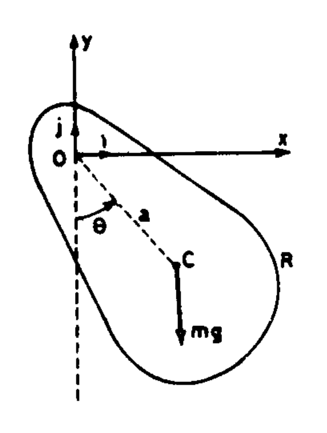
والدفع الزاوي بالعلاقة :

$$\vec{J_a} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\Lambda}\, dt \qquad (29)$$

وباستعمال العلاقة (26) نجد العلاقة (28) المطلوبة .

VI — تطبيق : دراسة النواس المركب :

يتألف النواس المركب من جسم مادي يدور حول محور ثابت . والفرق بينه وبين النواس البسيط هو اعتبار كل كتلة الجسم في النواس البسيط متجمعة في نقطة واحدة تبعد مسافة ثابتة عن محور الدوران ، على نقيض ما في النواس المركب من اعتبار الكتلة موزعة في الفراغ الذي يشغله الجسم الصلب الدائر توزيعاً ثابتاً .



الشكل (5)

ولذلك فان دراسة حركة النواس المركب ما هي إلا دراسة حركة جسم صلب حول محور ثابت .

ليكن اذن النواس المركب R المبين في الشكل (5) والذي يدور حول المحور الأفقي o المتعامد مع الشكل . ولتكن C مركز ثقله المتعين موضعه بالزاوية Θ في لحظة ما t ، علماً بأن بعده عن محور الدوران ثابت وليكن a . ان القوة الخارجية الوحيدة المؤثرة على النواس هي ثقله :

$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\,\vec{j} \qquad (30)$$

لكتابة معادلة حركة النواس هذا يمكن اتباع احدى النظريات السابقة .

آ — طريقة اولى : (نظرية انحفاظ الطاقة) :

لما كانت القوة $\vec{F}$ مشتقة من كمون

$$V = -\int \vec{F}.d\vec{r} = -\int F dy = -mgy = -mga\cos\Theta \qquad (31)$$

فان من الممكن استخدام نظرية انحفاظ الطاقة الكلية اي :

$$T + V = E \quad \text{ثابت} \qquad (32)$$

وهذه العلاقة تكتب بالشكل

$$\tfrac{1}{2} I\omega^2 - mga\cos\Theta = E \quad \text{ثابت} \qquad (33)$$

ولمـــا كانت $\omega = \frac{d\Theta}{dt}$ فيمكن اعادة كتابة العلاقة (33) على الشكل :

$$\Theta'^2 - 2A^2\cos\Theta = \frac{2E}{I} \quad \text{و} \quad Mga / I = A^2 \qquad (34)$$

حيث I عزم العطالة حول المحور o . وتمثل العلاقة الاخيرة معادلة حركة النواس المركب R حول المحور o . إلا انه لما كانت E ثابتة فبامكاننا الحصول على علاقة مكافئة للعلاقة الاخيرة وذلك باشتقاقها بالنسبة للزمن .

$$\Theta'\Theta'' + A^2 \sin\Theta\Theta' = o \qquad (35)$$

وبما ان $\omega = \Theta' \neq o$ في حالة الحركة فالاختصار على Θ' ممكن وتأخذ معادلة الحركة الشكل :

$$\Theta'' + A^2 \sin \Theta = o \qquad (36)$$

ب ــ طريقة ثانية : (نظرية الاندفاع الزاوي) :

لدينا في هذه الحالة العلاقات الاساسية التالية :

$$\vec{\Lambda} = d\,\vec{\Omega}/dt \qquad (37)$$

$$\vec{\Lambda} = \vec{a} \wedge \vec{F} = (a \sin \Theta\, \vec{i} - a \cos \Theta\, \vec{j}) \wedge (-m g\, \vec{j})$$

$$= - m g a \sin \Theta\, \vec{k} \qquad (38)$$

$$\vec{\Omega} = I\, \vec{\omega} = I \omega\, \vec{k} = I\, \Theta'\, \vec{k} \qquad (39)$$

ونجد بدمج العلاقات الثلاث هذه معادلة الحركة مباشرة أي :

$$\Theta'' + (m a g / I) \sin \Theta = \Theta'' + A^2 \sin \Theta = o \qquad (40)$$

وهي نفس العلاقة التي أوجدناها سابقاً والتي يؤدي حلها إلى معرفة الزاوية Θ التي تعين وضع النواس بدلالة الزمن .

ح ــ دراسة حركة النواس المركب :

يمكن دراسة حركة النواس المركب من خلال إحدى معادلتيه التفاضليتين (34) و (36) . ولما كانت العلاقة الأولى منها تعطي السرعة الزاوية مباشرة فنرى من الأفضل القيام بهذه الدراسة من هذه العلاقة . ففي العلاقة (34) تتعين E من شروط البدء :

$$t = o,\ \Theta = \Theta_o = o,\ \Theta' = \Theta'_o = \omega_o \qquad (41)$$

ولقد اخترنا الوضع الابتدائي بحيث كان مركز الثقل على الشاقول تحت محور التعليق وذلك لتبسيط المعادلة والدراسة . فشروط البدء هذه تعني أن النواس كان في لحظة البدء في وضع التوازن المستقر $\Theta = o$ وأعطي

سرعة ابتدائية ω_o . وهذه الشروط كافية لتعيين E من العلاقة (34) نفسها حيث نجد :

$$2E/I = 2E_o/I = \omega_o^2 - 2A^2 \qquad (42)$$

وبالتالي :

$$\Theta'^2 = 2A^2\cos\Theta + 2E/I = \omega_o^2 - 2A^2(1 - \cos\Theta)$$

أو :

$$\omega^2 = \Theta'^2 = \omega_o^2 - 4A^2 \sin^2(\Theta/2) \qquad (43)$$

تدل هذه العلاقة على أن السرعة الزاوية ω تنعدم عندما $\alpha = \Theta$ حيث

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \omega_o^2 / 4A^2$$

أو :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\,\omega_o / 2A \qquad (44)$$

أي :

$$\alpha = \pm\, 2\,\mathrm{Arc}\sin(\omega_o / 2A) \qquad (45)$$

فالزاوية Θ إذاً تتأرجح بين $+\alpha$ و $-\alpha$ والحركة عندئذ حركة اهتزازية . ولكن لما كان $\sin^2(\alpha/2) \leqslant 1$ فان شرط امكان انعدام السرعة الزاوية هو :

$$\omega_o^2 / 4A^2 \leqslant 1$$

أو :

$$\omega_o \leqslant 2A \qquad (46)$$

فاذا تحققت هذه المتراجحة كانت الحركة اهتزازية كما سبق ، وإلا فالسرعة

الزاوية لا تنعدم والحركة مستمرة في اتجاه واحد يحدده اتجاه السرعة الزاوية الابتدائية ω_0 .

د ـــ حالةالاهتزازات صغيرة السعة :

في الحالة الخاصة عندما تكون الاهتزازات صغيرة السعة يمكن أن نستعيض عن $\sin \Theta$ بالزاوية Θ نفسها فتأخذ معادلة حركة النواس المركب الشكل البسيط

$$\Theta'' + A^2\Theta = 0 \qquad (47)$$

ويعطي حلها الزاوية Θ بدلالة الزمن أي :

$$\Theta = C \sin (At + d) \qquad (48)$$

حيث يتعين ثابتا التكامل من شروط البدء . ففي حالة الشروط المعطاة بالعلاقات (41) نجد

$$C = A / \omega_0 = (1 / \omega_0)\sqrt{mg\, a / I} \qquad (49)$$

نلاحظ أن الحركة دورية ـ كما تبين العلاقة (48) ـوأن دورها p يجب أن يحقق العلاقة

$$A\, P = 2\pi$$

أي :

$$p = 2\pi / A = 2\pi \sqrt{I/mga} \qquad (50)$$

هـ ـــ النواس البسيط المكافىء للنواس المركب :

النواس البسيط الذي يكافىء النواس المركب هو الذي تتجمع كتلته في نقطة واحدة ويكون طوله L (بعد الكتلة عن مركز التعليق) بحيث يكون دوره مساوياً دور النواس المركب . ومن السهل أن نستنتج معادلة النواس البسيط

من معادلة النواس المركب بملاحظة ان الفرق بينها هو في عزم العطالة فقط .
فعزم العطالة للنواس البسيط هو $I = ML^2$ والمعادلة العامة للنواس البسيط عندئذ تأخذ الشكل :

$$\Theta'' + B^2 \sin \Theta = 0 \qquad B^2 = g / L \qquad (51)$$

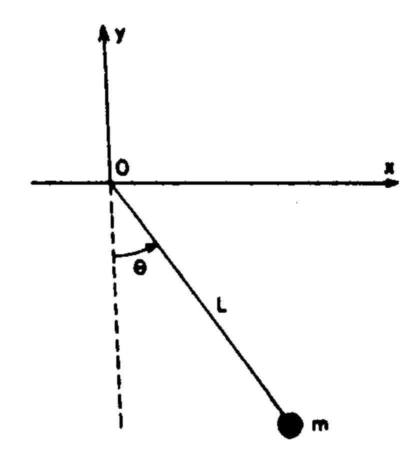
وحتى يتكافأ النواسان تماماً يجب أن يكون :

$$A^2 = B^2 \quad \text{أو} \quad mag / I = g / L$$

قارن المعادلتين (36)و(51) . ومنه

$$L = \frac{I}{ma} = \frac{mK^2}{ma} = \frac{K^2}{a} \qquad (52)$$

حيث K نصف قطر عطالة النواس المركب حول محور تعليقه .



الشكل (6)

إذن فالنواس البسيط المكافيء للنواس المركب الذي بعد مركز ثقله عن

محور التعليق a وكتلته m وعزم عطالته I ونصف قطر عطالته حول هذا المحور K يتصف بأن كتلته هي m نفس كتلة النواس المركب وبأن طوله معطى بالعلاقة (52) .

و ـــ النواس المركب ذو الدور الاصغري

يكون الدور :

$$P = 2\pi \sqrt{I / mga}$$

للنواس المركب اصغريا عندما ينعدم مشتقه بالنسبة لـ a ، على اعتبار ان البعد a يمكن تغييره . ولما كان حسب نظرية المحاور المتعامدة

$$I = I_c + ma^2 = mK_c^2 + ma^2$$

حيث I_c عزم العطالة حول محور مار من مركز الثقل ويوازي محور التعليق ، فان الدور يكتب بالشكل :

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{a + K_c^2/a} \qquad (53)$$

وينعدم مشتقه عندما يكون

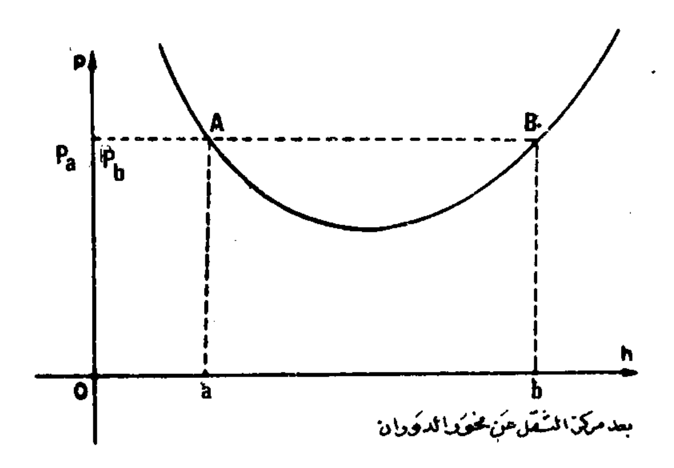
$$1 - \frac{K_c^2}{a^2} = 0$$

أي عندما $a = K_c$ وقيمة الدور الأصغري بالتعويض هي:

$$P_m = 2\pi \sqrt{2 K_c / g} \qquad (54)$$

ز ـــ النواس المعكوس :

بما أن دور النواس المركب يأخذ قيمة صغرى عندما $a = K_c$ فان تغيره بدلالة a هو كما يبين الشكل (7) . وهذا يعني أن الدور يأخذ قيمتين متساويتين من أجل بعدين مختلفين لمركز الثقل عن محور التعليق ، مثل



الشكل (7)

a ، b كما في الشكل(7).والعلاقة التي تربط هذين البعدين a ، b تنتج مباشرة من تساوي الدورين المقابلين لهما أي :

$$P_a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{a + K_c^2 / a}$$

$$P_b = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{b + K_c^2 / b}$$

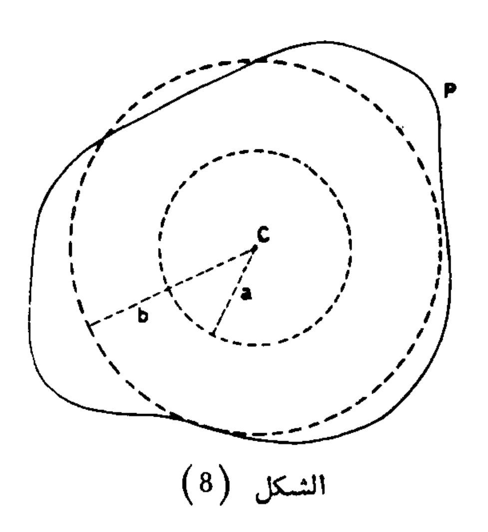
والمساواة بينهما تعطي :

$$a + K_c^2 / a = b + K_c^2 / b$$

أو :

$$a.b = K_c^2 \qquad (55)$$

فاذا علق النواس على بعدين a ، b مرتبطين بالعلاقة (55) كان له نفس الدور في الحالتين . النواس الذي يحقق هذا الشرط يسمى بالنواس المكوس . ويجدر بالذكر ان محور التعليق يمر من إحدى الدائرتين اللتين مركزاهما في مركز الثقل C ونصفا قطريهما هما a ، b المرتبطين بالعلاقة (55) كما يبين الشكل (8) .



الشكل (8)

VII — الحركة المستوية العامة للجسم الصلب :

يمكن أن تعتبر الحركة العامة المستوية للجسم الصلب كمجموع حركتين احداهما انسحابية والأخرى دورانية حول محور مناسب متعامد مع مستوى الحركة . وليس من الضروري اخذ محور الدوران ماراً من مركز الثقل وانما في كثير من الحالات يفضل مثل هذا الاعتبار . ان النظريات العامة السابقة في هذا البحث تنطبق على الحركة المستوية العامة للجسم الصلب.ويضاف مبدأ الاندفاع الخطي للجزء الانسحابي من الحركة ويتلخص هذا المبدأ في العلاقة

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_c = \vec{F} \qquad (56)$$

الذي وجدناه في السابق عندما درسنا مجموعة نقاط مادية ، حيث m الكتلة الكلية للجسم و $\vec{F}$ القوة الخارجية المؤثرة عليه و $\vec{a}_c$ تسارع مركز ثقل الجسم . ويجب الا يغيب عن الذهن أن أهم العلاقات المستخدمة في دراسة حركة الجسم الصلب هي العلاقة (56) والعلاقتان :

$$\vec{A}_c = \frac{d}{dt}\vec{\Omega}_c = I_c\,\vec{\omega'} \qquad (57)$$

$$T + V = \tfrac{1}{2} m v_c^2 + \tfrac{1}{2} I_c \omega^2 + V = E \quad (\text{ثابت}) \qquad (58)$$

حيث ترمز c لمركز الثقل . وقد سبق أن استخرجنا هاتين العلاقتين بصورة عامة . التطبيق التالي يوضح ما تقدم .

VIII– تطبيق : حركة اسطوانة دائرية على مستو مائل :

تتدحرج اسطوانــة صماء نصف قطرهــا a باحتكاك وبدون انزلاق على مستو مائل زاوية ميـله على الافق α . المطلوب دراسة حركة هذه الاسطوانة .

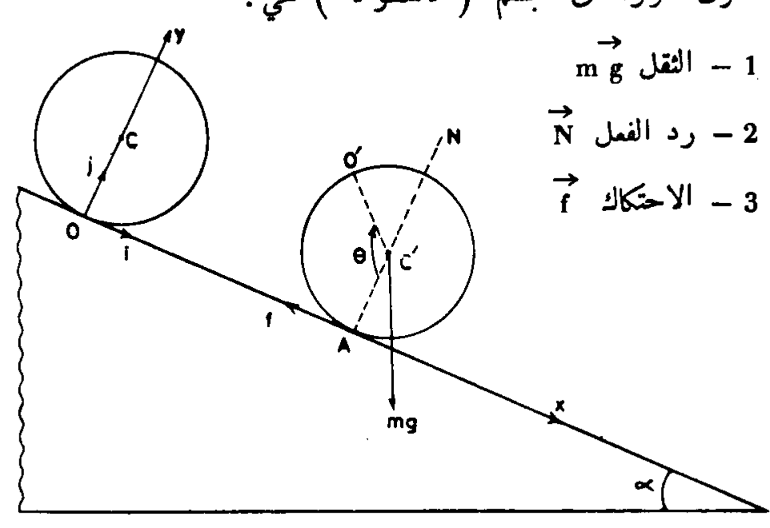
يمثل الشكل (9) وضعي الاسطوانة في لحظة البدء ولحظة ما t . وقد اختيرت جملة المقارنة العطالية المستوية بحيث أن ox ينطبق على خط الميل الاعظم للمستوى المائل و oy يتعامد عليه في مستوى الحركة الشاقولي .

القوى المؤثرة على الجسم (الاسطوانة) هي :

1 – الثقل $m\vec{g}$

2 – رد الفعل $\vec{N}$

3 – الاحتكاك $\vec{f}$



الشكل (9)

إن تطبيق العلاقتين (56) و (57) يعطي :

$$m\vec{R}''_c = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} \qquad (59)$$

$$\vec{\Lambda}_c = \vec{CA} \wedge \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{\Omega} = I_c \frac{d}{dt}\vec{\omega} \qquad (60)$$

ولكن الشكل يشير إلى ان

$$\vec{g} = g \sin\alpha\, \vec{i} - g\cos\alpha\, \vec{j} \qquad (61)$$

$$\vec{N} = mg\cos\alpha\, \vec{j} \qquad (62)$$

$$\vec{f} = -f\,\vec{i} \qquad (63)$$

$$\vec{CA} = -a\,\vec{j} \qquad (64)$$

$$I_c = \tfrac{1}{2} m a^2 \qquad (65)$$

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{k} = \Theta'\,\vec{k} \qquad (66)$$

وبالتعويض في العلاقتين (59) ، (60) نجد :

$$m\vec{R}''_c = (mg\sin\alpha - f)\,\vec{i} \qquad (67)$$

$$\Theta'' = 2f / ma \qquad (68)$$

هاتان العلاقتان الاخيرتان تعطيان تسارع مركز الثقل (اي تعين الحركة الانسحابية) والتسارع الزاوي (أي تعين الحركة الدورانية) .

إلا أنه هناك علاقة بين التسارع الزاوي والتسارع الانسحابي (تسارع مركز الثقل) . وتنتج هذه العلاقـة من ملاحظة أن الاسطوانة تتدحرج بدون ازلاق مما يجعل المسافة التي ينتقلها مركز الثقل تساوي طول القوس الذي تتدحرجه الأسطوانة . أي

$$\overline{OA} = \widehat{O'A} \qquad (69)$$

حيث O' هي النقطة من محيط الاسطوانة التي كانت في O في لحظة البدء .

وبالتالي :

$$\Theta = \widehat{O'A} / a = x / a \quad \text{أو} \quad \Theta'' = x'' / a \tag{70}$$

وبتركيب المعادلتين (68) ، (70) ينتج :

$$f = \frac{1}{3} m x'' \tag{71}$$

وباسقاط العلاقة (67) نجد :

$$m x'' = mg \sin \alpha - f \quad \text{و} \quad m y'' = 0$$

أو :

$$x'' = \frac{2}{3} g \sin \alpha \quad \text{و} \quad y'' = 0 \tag{72}$$

وإذا فرضنا أن شروط البدء هي

$$t = 0 \text{ و } x_0 = 0 \text{ و } y_0 = a \text{ و } x'_0 = 0 \text{ و } y'_0 = 0 \tag{73}$$

فاننا نجد :

$$x = \left(\frac{1}{3} g \sin \alpha \right) t^2 \text{ و } y = a \tag{74}$$

فالحركة الانسحابية متسارعة بانتظام على المستوى المائل . والحركة الدورانية هي أيضاً متسارعة بانتظام لأن :

$$\Theta'' = \frac{x''}{a} = \frac{2g}{3a} \sin \alpha \quad \text{أو} \quad \Theta = \left(\frac{1}{3} \frac{g}{a} \sin \alpha \right) t^2 \tag{75}$$

هذا ويمكن حساب عامل الاحتكاك

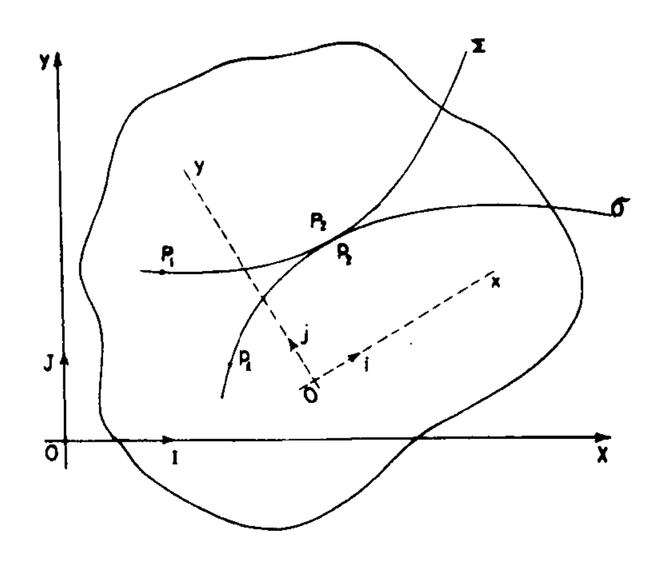
$$\mu = \frac{f}{N} = \frac{m x'' / 2}{m g \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{3 \cos \alpha} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha \tag{76}$$

نلاحظ أنه حتى تتم الحركة بدون انزلاق يجب أن يكون عامل الاحتكاك مساوياً على الأقل للقيمة السابقة . أي أن شرط عدم الانزلاق هو

$$\mu \geqslant \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha \tag{77}$$

IX — المركز الآني للدوران ، المحور الآني للدوران :

ليكن الجسم الصلب R المتحرك حركة مستوية موازية للمستوى الثابت OXY كما في الشكل (10) . ولتكن oxy جملة محاور متماسكة مع الجسم المتحرك. عندما يتحرك الجسم لا بد أن تكون هناك نقطة ثابتة يدور الجسم حولها



الشكل (10)

في أية لحظة من الزمن . وهذه النقطة قد لا تكون نقطة من الجسم وهي نقطة من الجملة المتحركة على أي حال . وهذه النقطة التي تسمى بالمركز الآني للدوران تكون ثابتة آنياً في اللحظة t بالنسبة للجملة OXY . وبمرور اللحظة الزمنية t تتغير هذه النقطة في كل من الجملتين oxy و OXY. ففي اللحظة t_1 مثلاً لتكن p_1 من الجملة المتحركة مركز آنياً للدوران أي ساكنة في الجملة الثابتة OXY . ولتكن P_1 موضعها في الجملة الأخيرة . وفي لحظة t_2 لاحقة يكون الجسم دائراً حول نقطة اخرى p_2 موضعها P_2 في الجملة الثابتة . فالمركز الآني للدوران تغير إذن في كل من الجملتين الثابتة والمتحركة .

ولذا يمكننا القول بان المركز الآني للدوران يرسم منحنياً في كل من الجلتين . ويكون المنحنيان مشتركين في نقطة واحدة في أية لحظة t .
يفيد ذلك أن المنحني الذي يرسمه المركز الآني للدوران في الجملة المتحركة المتماسكة مع الجسم يمس المنحني الذي يرسمه المركز الآني في الجملة الثابتة ، اي أن الأول يتدحرج على الثاني . نسمي الأول بالمنحنى الجسمي المركز الآني للدوران او المتدحرج بينما نسمي الثاني بالمنحني الفراغي لهذا المركز او القاعدة . كما نسمي المحور المتعامد مع مستوى الحركة والذي يمر من المركز الآني للدوران بالمحور الآني للدوران .

عندما تكون حركة الجسم حركة دورانية صرفة حول محور ثابت يكون المركز الآني للدوران ثابتاً في كلتا الجملتين وهو مركز الدوران .أما المحور الآني فهو محور الدوران نفسه . أما في الحالة التي تكون فيها حركة الجسم انسحابية فقط فيمكن اعتبار هذه الحركة دورانية حول مركز في اللانهاية وبالتالي فالمركز الآني للدوران واقع في اللانهاية .

لتعيين المنحنى الفراغي للمركز الآني للدوران «القاعدة» نعتبر النقطة p المتحركة في كل من الجملتين الجسمية oxy والفراغية OXY كما في الشكل (11) .
ان السرعة المطلقة للنقطة p (أي في الجملة OXY) تعطى بالعلاقة

$$D_I \vec{\varrho} = D_I (\vec{R} + \vec{r})$$

$$= D_I \vec{R} + D_I \vec{r}$$

ولكن :

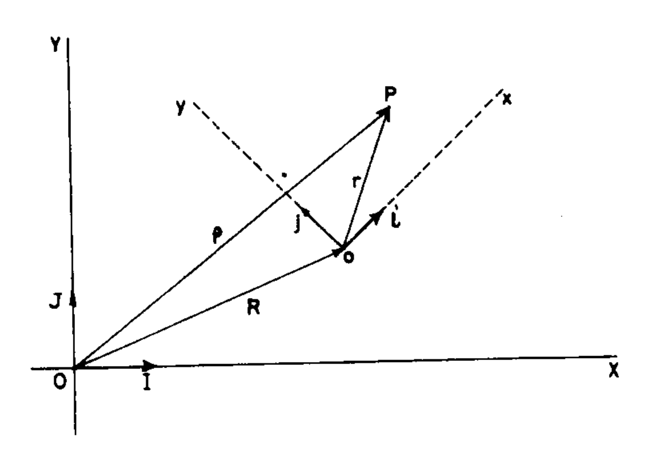
$$D_I \vec{r} = D_N \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

إذن :

$$D_I \vec{\varrho} = D_I \vec{R} + D_N \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{78}$$

$$\vec{v} = \vec{u} + \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

حيث $\vec{v}$ سرعـة P المطلقـة في الجملة OXY و $\vec{u}$ سرعـة مبدأ الجملة المتحركة oxy . لنعتبر الآن أن P هي المركز الآني للدوران . فهي اذن في اللحظة المعتبرة t نقطـة ساكنة في كل من الجملتـين أي $\vec{v} = o$ ، $d\vec{r} / dt = o$.



الشكل (11)

إذن :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\varrho} - \vec{R}) = -\vec{u} \qquad (79)$$

وبضرب طرفي (79) خارجياً بـ $\vec{\omega}$ نجد :

$$\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{\varrho} - \vec{R})] = -\vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

أو :

$$\vec{\omega} [\vec{\omega} \cdot (\vec{\varrho} - \vec{R})] - (\vec{\varrho} - \vec{R})(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

الحد الأول من الطرف الايسر معدوم لتعامد $\vec{\omega}$ مع $(\vec{\varrho} - \vec{R})$
إذن :

$$\omega^2 (\vec{\varrho} - \vec{R}) = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

ومنه :

$$\vec{\varrho} = \vec{R} + \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{u}}{\omega^2} = \vec{R} + \frac{\vec{\omega} \wedge d\vec{R}/dt}{\omega^2} \qquad (80)$$

فاذا اختيرت o منطبقة على مركز الثقل C كان :

$$\vec{\varrho} = \vec{R}_c + \frac{\vec{\omega} \wedge d\vec{R}_c/dt}{\omega^2} \qquad (81)$$

حيث تتعين $\vec{R}_c$ و $d\vec{R}_c/dt$ من الحركة الانسحابية لمركز الثقل وفق العلاقة :

$$m\, d^2 \vec{R}_c / dt^2 = \vec{F} \qquad (82)$$

فالعلاقة (81) تعين لنا اذن المنحنى الفراغي للمركز الآني للدوران.

X — **تطبيق على تدحرج اسطوانة على مستو مائل :**

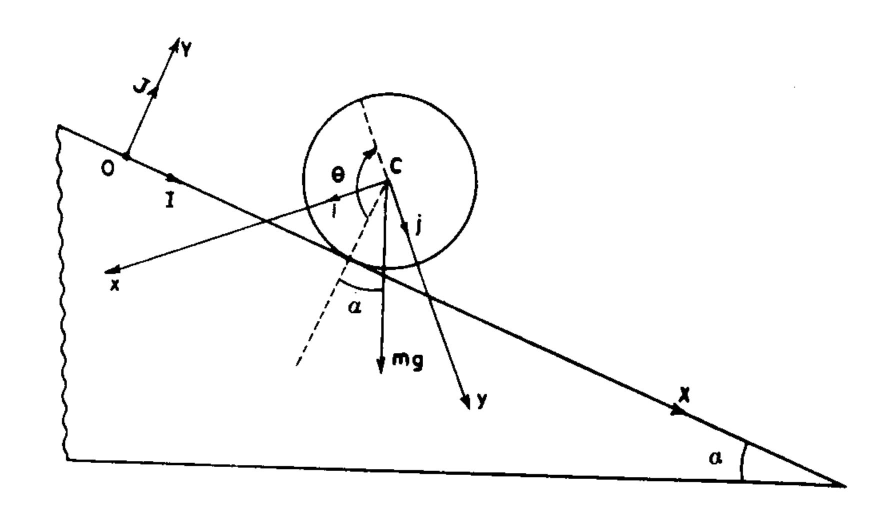
لندرس التطبيق السابق الوارد في الفقرة VIII بالاستناد إلى المركز الآني للدوران . يتعين المركز الآني للدوران بالعلاقة :

$$\vec{\varrho} = \vec{R}_c + \frac{\vec{\omega} \wedge d\vec{R}_c/dt}{\omega^2}$$

$$\vec{\varrho} = \vec{R} + \frac{\vec{\omega} \wedge u_c \vec{I}}{\omega^2}$$

$$= \vec{R} - \frac{\omega\, u_c}{\omega^2} \vec{J}$$

$$= \vec{R}_c - \frac{u_c}{\omega} \vec{J}$$



شكل (12)

وبالاسقاط على المحورين ox و oy نجد :

$$x_p = x_c \text{ و } y_p = y_c - u_c / \omega = a - u_c / \omega \qquad (83)$$

هاتان المعادلتان تعينان المنحني الفراغي للمركز الآني للدوران . ونلاحظ أن المركز الآني للدوران واقع على مستقيم يوازي OY ويمر من C ، كما تبين العلاقة الاولى من (83) ، وانه يبعد عن OX مسافة $a - u_c / \omega$.

في الحالة الخاصة عندما لا يوجد انزلاق تكون سرعة مركز الثقل $u_c = a\,\omega$ وتصبح معادلات المركز الآني للدوران :

$$x_p = x_c \quad \text{و} \quad y_p = o$$

وهذا يدل على أن نقطة تماس الاسطوانة مع المستوى المائل هي المركز الآني للدوران ، وأن المحور الآني للدوران هو مولد الاسطوانة الواقع في المستوي المائل .

نلاحظ من (83) أن المركز الآني للدوران في جملة الجسم يبعد مسافة u_c / ω عن مركز الثقل C ، فالمنحني الجسمي المركز الآني للدوران هو دائرة مركزها C ونصف قطرها $b = u_c / \omega$. وفي الحالة الخاصة عندما لا يوجد انزلاق يصبح نصف القطر :

$$b = u_c / \omega = a\,\omega / \omega = a$$

ويكون المنحني الجسمي للمركز الآني للدوران محيط الاسطوانة .

والآن يمكن تطبيق نظرية العزم الزاوي $\vec{\Lambda} = d\vec{\Omega} / dt$ للدوران حول P وذلك في حالة عدم وجود انزلاق .

$$\vec{\Lambda} = (-a\,\vec{j}) \wedge (mg \sin \alpha\,\vec{i}) = mg\,a \sin \alpha\,\vec{k} \qquad (85)$$

$$\vec{\Omega}_p = I_p\,\vec{\omega} = (I_c + m a^2)\,\Theta'\,\vec{k} = \frac{3}{2}\,m a^2 \Theta'\,\vec{k}$$

$$d\vec{\Omega}_p / dt = \frac{3}{2}\,m a^2 \Theta''\,\vec{k} \qquad (86)$$

ومنه :

$$mg\,a \sin \alpha = \frac{3}{2}\,m\,a^2\,\Theta''$$

أو :

$$\Theta'' = \frac{2\,g}{3\,a} \sin \alpha \qquad (87)$$

ولعدم وجود انزلاق يكون :

$$x = x_c = x_p = a\Theta$$

وهذا ما يؤدي إلى :

$$x'' = a\,\Theta'' = \frac{2\,g}{3} \sin \alpha \qquad (88)$$

وهكذا فان العلاقة (87) تعطينا نفس التسارع الزاوي الذي وجدناه في الدراسة الأولى . انظر العلاقة (75) . كما ان العلاقة (88) تعطينا نفس التسارع الخطي الذي حصلنا عليه في العلاقة (72). اذن فالطريقتان متكافئتان تمام التكافؤ من حيث دراسة الحركة .

XI — توازن الجسم الصلب :

لما كان التوازن حالة خاصة من الحركة فان الجسم الصلب يكون متوازناً إذا كان لا ينسحب ولا يدور وهذا يعود إلى الشرطين :

$$\vec{F} = o \quad , \quad \vec{\Lambda} = o$$

اي ان محصلة القوى المؤثرة الخارجية في الجسم معدومة والعزم الحاصل لهذه القوى معدوم أيضاً .

ويجدر أن نلاحظ أن مبدأ العمل الافتراضي ومبدأ دالمبرت المشتقين من أجل مجموعة من النقاط المادية ينطبقان هنا لأن الجسم الصلب حالة خاصة لمجموعة النقاط المادية . وفي الحالة التي تكون فيها القوى الخارجية $\vec{F}$ مشتقة من كمون :

$$V = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{أو} \quad \vec{F} = - \vec{\nabla} V$$

فشرط التوازن يكون :

$$\vec{\nabla} V = o \quad \text{أو} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = o , \frac{\partial V}{\partial y} = o , \frac{\partial V}{\partial z} = o$$

وإن التوازن مستقر إذا كان الكمون في نهاية صغرى وغير مستقر إذا كان في نهاية عظمى ، كما رأينا في السابق .

فالشرط اللازم والكافي ليتوازن الجسم هو انعدام القوى (أي انعدام مشتقات الطاقة الكامنة) وان يكون الجسم بالأصل بدون حركة . أما

الشرط اللازم والكافي لاستقرار التوازن فهو عندئذ كون الـكمون أصغرياً.

XII — **تطبيق :**

يقف رجل وزنه W_m على رأس سلم طوله L وزنه W ويستند الى الجدار بدون احتكاك والى الارض باحتكاك μ . بين أن شرط التوازن هو

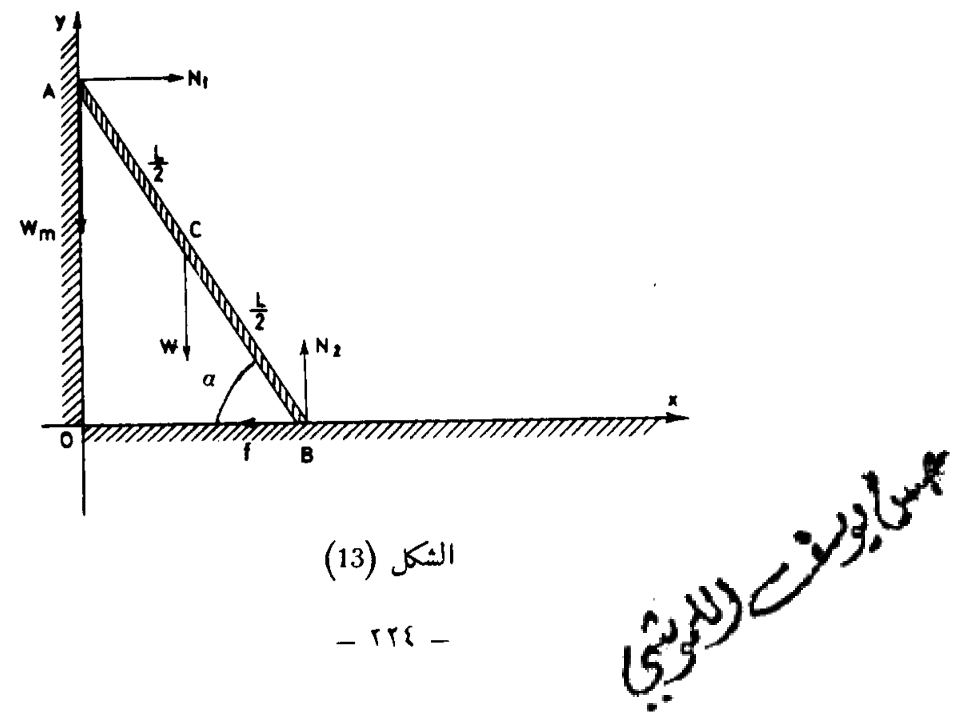
$$\mu \geqslant \frac{W_m + W/2}{W_m + W} \operatorname{ctg} \alpha$$

حيث α زاويته مع الأرض .

شرطا التوازن هما انعدام محصلة القوى المؤثرة وانعدام محصلة العزوم لهذه القوى حول نقطة ما ولتكن A مثلاً . اذن :

$$\vec{F} = \vec{W} + \vec{W}_m + \vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0$$

$$\vec{\Lambda} = \vec{AC} \wedge \vec{W} + \vec{AB} \wedge \vec{F} + \vec{AB} \wedge \vec{N}_2 = 0$$



الشكل (13)

وباسقاط هاتين العلاقتين على ox و oy نحصل على اربع علاقـات حلها يعطى :

$$F = N_1 = \left(W_m + W/2 \right) \operatorname{ctg} \alpha$$

$$N_2 = W_m + W$$

(على الطالب أن يتم العمليات الجبرية بنفسه) .

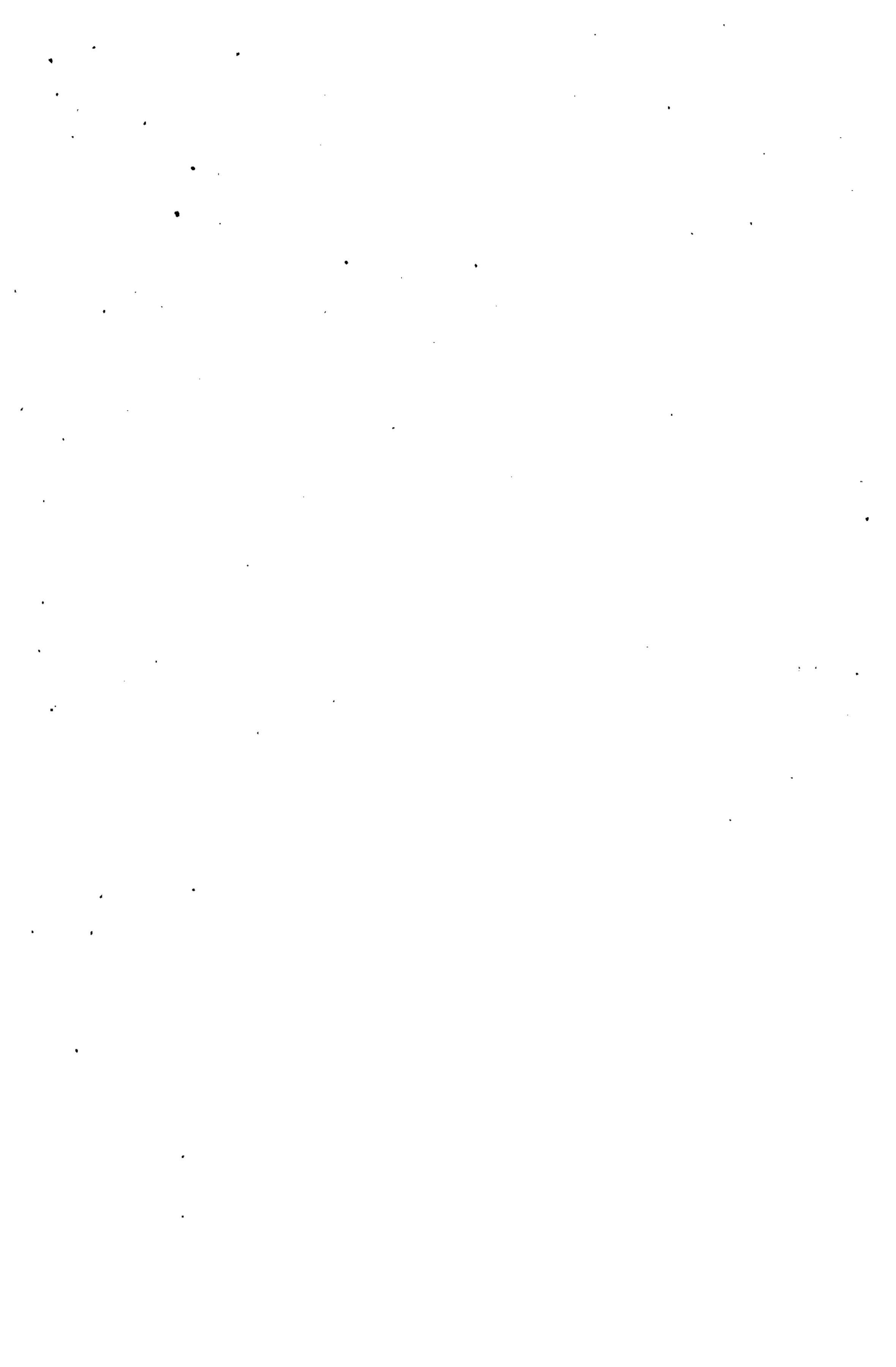
فاذا حصل التوازن كان $F = \mu N_2$ أو :

$$\mu = \frac{F}{N_2} = \frac{W_m + W/2}{W_m + W} \operatorname{ctg} \alpha$$

ومن الواضح أنه اذا كانت قيمة عامل الاحتكاك أكبر من هذه القيمة فان التوازن يبقى محققاً الا أنه ينعـدم من أجل قيم أصغر منها ولذلك فالتوازن يتحقق اذا كان :

$$\mu \geqslant \frac{W_m + W/2}{W_m + W} \operatorname{ctg} \alpha$$

* * *



الفصل الحادي عشر

الحركة الفراغية للجسم الصلب

- الاندفاع الزاوي للحركة الدورانية للجسم الصلب حول نقطة
- الطاقة الحركية الدورانية للجسم الصلب حول نقطة
- محاور العطالة الرئيسية
- الاندفاع الزاوي حول محاور العطالة الرئيسية
- الطاقة الحركية حول محاور العطالة الرئيسية
- نظرية الاندفاع الزاوي ومعادلات اولير للحركة
- المستقيم والمستوي اللامتحولان في حالة انعدام العزم الحاصل
- حركة الجسم المتناظر ، المخروط الجسمي والمخروط الفراغي
- تطبيق : حركة الارض
- زوايا اولير
- تعيين مركبات شعاع الدوران بدلالة زوايا اولير
- دراسة الحركة بدلالة زوايا اولير
- حركة الدوامة الجيروسكوبية
- تفسير الحركة الجيروسكوبية للدوامة
- الجيروسكوب

لقد درسنا الحركة المستوية للجسم الصلب بشيء من التفصيل ، ورأينا ان هذه الحركة مؤلفة من مجموع حركتين : حركة انسحابية مستوية لنقطة منه وحركة دورانية حول محور مار من تلك النقطة ناظمياً على مستو ثابت . ولقد رأينا أيضاً انه من المفيد في كثير من الأحيان أن تتعين الحركة الانسحابية لمركز الثقل وان تعتبر بعد ذلك الحركة الدورانية حول محور مار من مركز الثقل .

أما الحركة العامة الفراغية للجسم الصلب ، وهي موضوع هذا الفصل فانها تتركب بصورة عامة من حركتين الأولى انسحابيـة في الفراغ لنقطة من الجسم والثانية حركة دورانية حول محور مار من تلك النقطة وله منحى متغير مع الزمن . وفي العبارة الأخيرة يكمن الفرق بين الحركتين الدورانيتين المستوية والفراغية . في حـين كانت درجات الحرية ثلاثاً بالنسبة للحركة المستوية للجسم الصلب نجد هنا ان درجات الحرية تصبح ستاً . ثلاث منها لتعيين الحركة الانسحابية الفراغية والثلاث الأخرى لتعيين الحركة الدورانية لأن تعيين محور الدوران يتطلب متحولين مستقلين وتعيين وضع الجسم الدائر حول هذا المحور يتطلب متحولاً مستقلاً واحداً .

ورأينا فيما سبق ان مركز ثقل جملة ميكانيـكية متحركة يتحرك وكأنه خاضع لجميع القوى التي تؤثر على مختلف نقاط الجملة . فحركة مركز الثقل هي حركة انسحابية تتعين بالعلاقة :

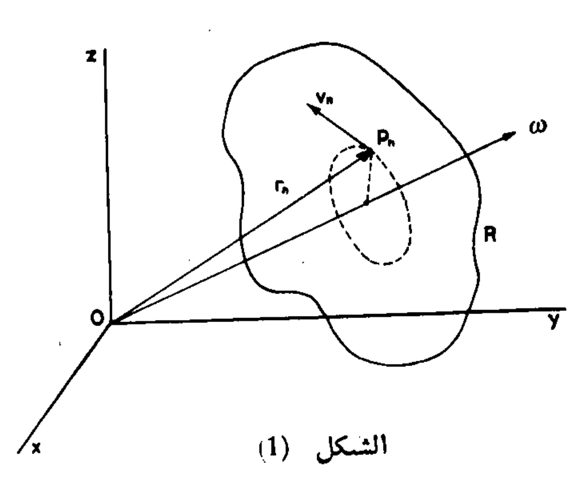
$$M \vec{r}_c'' = \vec{F} \qquad (1)$$

حيث $\vec{r}''_c$ تسارع مركز ثقل الجملة و M الكتلة الكلية للجملة المتحركة و $\vec{F}$ محصلة جميع القوى المؤثرة في نقاط المجموعة . إذن فالحركة الانسحابية للجسم الصلب ترد إلى حركة نقطة واحدة . وقد أتينا على دراسة هـذه الحركة بالتفصيل في فصول سابقة . ولذلك سنخصص هذا الفصل للدراسة التفصيلية للحركة الدورانية حول محور متغير مار من نقطة معينة . وسنسمي هذه الحركة اختصاراً بالحركة الدورانية حول نقطة .

I ـ الاندفاع الزاوي للحركة الدورانية للجسم الصلب حول نقطة :

لتكن O نقطة ثابتة من الجسم الصلب المتحرك R . ولنعتبر دوران هذا الجسم حول هذه النقطة . ففي أية لحظة زمنية t يكون الجسم دائراً حول محور مار من O بسرعة زاوية $\vec{\omega}$. ويجب التذكر أن هذا المحور ليس ثابتاً وانما يتغير من لحظة الى أخرى ، الا أنه يبقى ماراً من O . إذا كانت P_n نقطة ما من الجسم فان لها في اللحظة t سرعة آنية $\vec{v}_n$ تعطى بالعلاقة :

$$\vec{v}_n = \vec{r}'_n = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_n \qquad (2)$$



الشكل (1)

والاندفاع الزاوي لتلك النقطة يعطى عندئذ وكما رأينا سابقاً بالعلاقة :

$$\vec{\Omega}_n = m_n \left(\vec{r}_n \wedge \vec{r}'_n \right)$$

$$= m_n \left[\vec{r}_n \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_n \right) \right] \tag{3}$$

حيث m_n كتلة النقطة P_n ..والاندفاع الزاوي الكلي للجسم ينتج من اعتبار حركة جميع نقاط الجسم . إذن :

$$\vec{\Omega} = \sum_n \vec{\Omega}_n = \sum_n m_n \left[\vec{r}_n \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_n \right) \right]$$

$$\vec{\Omega} = \sum_n m_n \left[\left(\vec{r}_n \cdot \vec{r}_n \right) \vec{\omega} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_n \right) \vec{r}_n \right] \tag{4}$$

حيث استعملنا خاصة جداء الأشعة :

$$\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C} \right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C} \right) \vec{B} - \left(\vec{A} \cdot \vec{B} \right) \vec{C} \tag{5}$$

سنكتب $\vec{\omega}$ و $\vec{r}_n$ و $\vec{\Omega}$ بدلالة مركباتها على المحاور ox و oy و oz بالأشكال التالية :

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \tag{6}$$

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k} \tag{7}$$

$$\vec{r}_n = x_n \vec{i} + y_n \vec{j} + z_n \vec{k} \tag{8}$$

فاذا استعملنا العلاقات (6) ، (7) ، (8) في العلاقة (4) ثم طابقنا أمثال أشعة الواحدة $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ في طرفي العلاقة الناتجة حصلنا عندئذ على العلاقات التالية :

$$\Omega_x = I_{xx}\ \omega_x + I_{xy}\ \omega_y + I_{xz}\ \omega_z \qquad (9)$$

$$\Omega_y = I_{yx}\ \omega_x + I_{yy}\ \omega_y + I_{yz}\ \omega_z \qquad (10)$$

$$\Omega_z = I_{zx}\ \omega_x + I_{zy}\ \omega_y + I_{zz}\ \omega_z \qquad (11)$$

حيث I_{xx} و I_{yy} و I_{zz} هي عزوم العطالة حول المحاور ox و oy و oz بالترتيب وحيث I_{xy} و I_{yz} و I_{zx} هي مضاريب العطالة . راجع بحث عزوم العطالة .

يمكن دمج العلاقات (9) و (10) و (11) في علاقة واحدة باستعمال خواص المصفوفات . والعلاقة الناتجة هي :

$$\begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad (12)$$

حيث مثلنا كلا من الشعاعين $\vec{\Omega}$ و $\vec{\omega}$ بمصفوفة عمودية حدودها مركبات الشعاع نفسه على المحاور الاحداثية . ويمكن كتابة العلاقة الأخيرة بالشكل المختصر :

$$\vec{\Omega} = (\ I\ )\vec{\omega} \qquad (13)$$

حيث تمثل (I) مصفوفة العطالة . ونلاحظ أن هذا الشكل للاندفاع الزاوي يشبه ما حصلنا عليه في الحركة المستوية للجسم الصلب في الفصل السابق . يجدر بنا أن نلاحظ ان الشعاعين $\vec{\Omega}$ و $\vec{\omega}$ يمكن أن يمثلا بمصفوفتين سطريتين وعندئذ يجب ان نبادل موضعي الشعاع $\vec{\omega}$ والمصفوفة (I) في العلاقتين (12) و (13) .

إذا قارنا العلاقة (13) مع العلاقة (11) من الفصل السابق فاننا نجد ان هناك اختلافاً جوهرياً بين العلاقتين وهو أن I في العلاقة الثانية يمثل عزم العطالة حول محور الدوران وهو عدد سلمي بينما تمثل (I) في العلاقة (13) مصفوفة العطالة لا عزم العطالة . ثم ان الاندفاع الزاوي في العلاقة (11) من الفصل السابق محمول على $\vec{\omega}$ في حين انه ليس كذلك في العلاقة (13) . (ينصح الطالب بمراجعة بحث المصفوفات في الرياضيات) .

II — الطاقة الحركية الدورانية للجسم الصلب حول نقطة :

رأينا سابقاً ان الطاقة الحركية لجملة ما تساوي مجموع الطاقات الحركية لجميع نقاطها . اذن :

$$T = \sum_n \tfrac{1}{2} m_n v_n^2 = \sum_n \tfrac{1}{2} m_n \vec{v}_n \cdot \vec{v}_n$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_n m_n (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_n) \cdot \vec{v}_n$$

$$= \tfrac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_n m_n \vec{r}_n \wedge \vec{v}_n$$

$$= \tfrac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\Omega} \qquad (14)$$

وهذه العلاقة تمثل أحد أشكال الطاقة الحركية الدورانية . وتنتج صيغة ثانية بالاستعاضة عن $\vec{\Omega}$ بما يساويها من العلاقة (13) حيث نجد :

$$T = \tfrac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (I) \vec{\omega} \qquad (15)$$

ويجدر بنا ان نشير الى ان العمليات الجبرية والشعاعية التي يشتمل عليها ضمنا الطرف الايمن من هذه العلاقة يجب أن تجرى بالترتيب وليست تبديلة .

والشكل الثالث لهذه الطاقة ينتج مباشرة بانجاز العمليات الجبرية في العلاقة الأخيرة ونجد :

$$T = \frac{1}{2} \left[I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 + 2 I_{xy} \omega_x \omega_y + 2 I_{yz} \omega_y \omega_z + 2 I_{zx} \omega_z \omega_x \right] \quad (16)$$

واخيراً إذا كانت α ، β ، γ زوايا توجيه محور الدوران كان لدينا :

$$\omega_x = \omega \cos \alpha \;, \omega_y = \omega \cos \beta \;, \omega_z = \omega \cos \gamma \quad (17)$$

وتصبح T عندئذ بالتعويض :

$$T = \frac{1}{2} \left[I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma + 2 I_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2 I_{yz} \cos \beta \cos \gamma + 2 I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha \right] \omega^2$$

ولكن التركيب الموجود ضمن المعترضتين هو عزم عطالة الجسم حول محور الدوران .

ولذلك :

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (18)$$

وهذه العلاقة تطابق ما وجدناه في الحركة الدورانية المستوية للجسم الصلب . ونشير بصورة خاصة إلى ان I هنا هي عزم العطالة حول محور الدوران ، وليس مصفوفة العطالة ، وان عزم العطالة هذا متغير لتغير محور الدوران وليس ثابتاً كما في حالة الحركة المستوية . وهكذا مثلنا T بأربعة أشكال في العلاقات (14) و (15) و (16) و (18) وكلها متكافئة تمام التكافؤ .

III — محاور العطالة الرئيسية :

لقد رأينا أن الاندفاع الزاوي للجسم الدائر يعطى بدلالة شعاع الدوران $\vec{\omega}$ ومصفوفة العطالة (I) التي تتألف حدودها من عزوم العطالة حول

المحاور الاحداثية ومضاريب المطالة حول تلك المحاور ، كما أن $\vec{\Omega}$ لا يوازي $\vec{\omega}$ او ليس محمولاً عليه بصورة عامة . وحساب الاندفاع الزاوي $\vec{\Omega}$ يتطلب معرفة عزوم ومضاريب المطالة على حد سواء . وسعياً وراء تبسيط حساب $\vec{\Omega}$ سنحاول إيجاد ثلاثة محاور متعامدة ومتماسكة مع الجسم تكون مضاريب المطالة حولها معدومة بحيث لا يبقى في مصفوفة المطالة (I) إلا حدود القطر الرئيسي لها فقط ، وبالتالي تنخفض كمية الحسابات كثيراً حيثما وجدت المصفوفة (I) . هذه المحاور الثلاثة التي نفتش عنها تسمى بمحاور المطالة الرئيسية للجسم وتعرف كما يلي : « محاور المطالة الرئيسية لجسم ما هي ثلاثة محاور متماسكة مع الجسم ومتعامدة فيما بينها ومضاريب المطالة حولها معدومة ». وتتميز هذه المحاور بالصفة التالية « إذا دار الجسم حول أحد محاورعطالته الرئيسية بسرعة دورانية $\vec{\omega}$ فان الاندفاع الزاوي عندئذ محمول على شعاع الدوران. وبشكل رياضي :

$$\vec{\Omega} = J \, \vec{\omega} \qquad (19)$$

حيث J مقدار سلمي .

وفي الحقيقة إن مضموني ما جاء في التعريف وفي الخاصة السابقة متكافئان تمام التكافؤ وينتج احدهما من الآخر . ولذلك يمكن اعتبار أحدهما كتعريف والآخر كصفة ناتجة عنه .

لايجاد المحاور الرئيسية نعتبر العلاقة (19) ونعوض فيها $\vec{\omega}$ و $\vec{\Omega}$ من العلاقات (6) و (7) و (9) و (10) و (11) بعد الاسقاط على المحاور ox و oy و oz فنجد :

$$\left.\begin{aligned}
(I_{xx} - J)\,\omega_x + I_{xy}\,\omega_y + I_{xz}\,\omega_z &= 0 \\
I_{yx}\,\omega_x + (I_{yy} - J)\,\omega_y + I_{yz}\,\omega_z &= 0 \\
I_{zx}\,\omega_x + I_{zy}\,\omega_y + (I_{zz} - J)\,\omega_z &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

هذه العلاقات الثلاث تعين ω_x و ω_y و ω_z ، مركبات شعاع الدوران $\vec{\omega}$ حول المحور الرئيسي الذي يحقق الصفة الرئيسية المتمثلة بالعلاقة (19) . ولما كانت $\vec{\omega}$ محمولة على محور الدوران (وهو المحور الرئيسي في هذه الحالة) فان $\vec{\omega}$ او مركباتها ω_x و ω_y و ω_z تعين هذا المحور .

ان العلاقات الأخيرة تمثل ثلاث معادلات جبرية متجانسة (بدون طرف ثان) وفيها ثلاثة متحولات . فحتى يكون لهذه المعادلات حل غير الصفر يجب أن يكون معين الأمثال فيها معدوماً أي :

$$\begin{vmatrix} I_{xx}-J & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy}-J & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}-J \end{vmatrix} = 0 \qquad (21)$$

أي أن الثابت J يجب أن يحقق هذه العلاقة التي هي من الدرجة الثالثة بالنسبة له (أي بالنسبة لـ J) . فهناك اذن ثلاث قيم لـ J وهي جذور هذه المعادلة ولتكن J_1 و J_2 و J_3 .

بتعويض كل قيمة لـ J في العلاقات (20) نحصل على قيم ω_x و ω_y و ω_z بشرط ان نختار احداها بشكل اختياري . إذن هناك ثلاثة محاور رئيسية D_1 و D_2 و D_3 وأشعة الدوران حولها هي ω_1 و ω_2 و ω_3 تعطى بالعلاقات :

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_1 &= \omega_{x_1}\vec{i} + \omega_{y_1}\vec{j} + \omega_{z_1}\vec{k} \\ \vec{\omega}_2 &= \omega_{x_2}\vec{i} + \omega_{y_2}\vec{j} + \omega_{z_2}\vec{k} \\ \vec{\omega}_3 &= \omega_{x_3}\vec{i} + \omega_{y_3}\vec{j} + \omega_{z_3}\vec{k} \end{aligned} \qquad (22)$$

المحاور D_1 و D_2 و D_3 او $\vec{\omega}_1$ و $\vec{\omega}_2$ و $\vec{\omega}_3$ متعامدة فيما بينها . وصفة

التعامد هذه ناتجة عن كون هذه الأشعة الثلاثة حلولاً لنفس المجموعة من من المعادلات وهي (20) . (وينصح الطالب بمراجعة هذا الموضوع في الرياضيات) .

هذا ويمكن البرهان على أنه إذا كان الجسم متناظراً فان محور التناظر هو أحد المحاور الرئيسية وان المحورين الرئيسيين الآخرين هما محوران يقطمانه في نقطة واحدة ويشكلان معه ثلاثية قائمة . والبرهان على ذلك ينتج مباشرة من حساب مضاريب العطالة حول مثل هذه المحاور وبيان انها معدومة .

وهذه الخاصة للجسم المتناظر ذات أهمية كبرى في كتابة معادلات الحركة . وسنرى ذلك فيما بعد .

IV — الاندفاع الزاوي حول محاور العطالة الرئيسية :

إذا كانت $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$ و $\vec{e_3}$ اشعة واحدة المحاور الرئيسية D_1 و D_2 و D_3 فان شعاع الدوران الكلي $\vec{\omega}$ يكتب بدلالة مركباته على هذه المحاور بالشكل:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e_1} + \omega_2 \vec{e_2} + \omega_3 \vec{e_3} \tag{23}$$

ويكون الاندفاع الزاوي عندئذ حسب الخاصة (19)

$$\vec{\Omega} = J_1 \omega_1 \vec{e_1} + J_2 \omega_2 \vec{e_2} + J_3 \omega_3 \vec{e_3} \tag{24}$$

ومركباته على المحاور الرئيسية هي بالتالي :

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= J_1 \omega_1 \\ \Omega_2 &= J_2 \omega_2 \\ \Omega_3 &= J_3 \omega_3 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

وهذه العلاقات تختزل بعلاقة واحدة باستعمال مفهوم المصفوفات أي :

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \qquad (26)$$

أو

$$\vec{\Omega} = (\,J\,)\,\vec{\omega} \qquad (27)$$

والآن إذا قارنا العلاقتين (12) و (26) او العلاقتين (13) و (27) نستنتج ان المصفوفة

$$(\,J\,) = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \qquad (28)$$

تمثل مصفوفة المطالة حول المحاور الرئيسية D_1 و D_2 و D_3 . وهذه المصفوفة هي مصفوفة قطرية حدود قطرها الرئيسي يجب أن تكون عزوم المطالة حول هذه المحاور . أما حدودها المتبقية والتي تمثل مضاريب المطالة حول تلك المحاور فمعدومة . وبذلك نكون قد برهنا الخاصة الأساسية التي وردت في تعريف المحاور الرئيسية .

V — الطاقة الحركية حول محاور المطالة الرئيسية :

بعد ان عينا شعاع الدوران وشعاع الاندفاع الزاوي حول المحاور الرئيسية أصبح من السهل جداً حساب الطاقة الحركية .

$$T = \tfrac{1}{2}\,\vec{\omega}\,.\,\vec{\Omega} = \tfrac{1}{2}\,\vec{\omega}\,.\,(J)\,\vec{\omega}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\,J_1\,\omega_1^2 + J_2\,\omega_2^2 + J_3\,\omega_3^2\,\right] \qquad (29)$$

ولعل من المفيد ان نذكر القارىء من جديد بأن J_1 و J_2 و J_3 هي عزوم عطالة الجسم حول محاور عطالته الرئيسية D_1 و D_2 و D_3 المتماسكة معه ، وان ω_1 و ω_2 و ω_3 هي مركبات السرعة الزاوية (شعاع الدوران) على تلك المحاور .

VI — نظرية الاندفاع الزاوي ومعادلات اولير للحركة :

بعد ان درسنا الاندفاع الزاوي والطاقة الحركية دراسة مستفيضة يمكننا الآن أن نطبق نظرية الاندفاع الزاوي لايجاد معادلات الحركة الدورانية للجسم . وسنعتبر المحاور الرئيسية للجسم لما تقدمه من تبسيط في رياضيات العلاقات الناتجة .

لتكن $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$ و $\vec{e_3}$ أشعة واحدة مجموعة المحاور الرئيسية ox' ، oy' ، oz' والتي سنرمز لها للاختصار بالرمز S' ، تمييزاً لها عن جملة المحاور الاحداثية ox ، oy ، oz التي نرمز لها بالرمز S . ويمكن أن نكتب :

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e_1} + \omega_2 \vec{e_2} + \omega_3 \vec{e_3} \tag{30}$$

$$\vec{\Omega} = J_1 \omega_1 \vec{e_1} + J_2 \omega_2 \vec{e_2} + J_3 \omega_3 \vec{e_3} \tag{31}$$

$$\vec{\Lambda} = A_1 \vec{e_1} + A_2 \vec{e_2} + A_3 \vec{e_3} \tag{32}$$

ولما كانت جملة المحاور الرئيسية S' متماسكة مع الجسم وتدور معه فان شعاع دورانها حول الجملة S هو $\vec{\omega}$. وبتطبيق نظرية الاندفاع الزاوي في الجملة S نجد :

$$\vec{\Lambda} = d\vec{\Omega}/dt\,\Big|_S = d\vec{\Omega}/dt\,\Big|_{S'} + \vec{\omega} \wedge \vec{\Omega} \tag{33}$$

وبالتعويض في هذه العلاقة من (30) و (31) و (32) واسقاط العلاقة الناتجة على محاور الجملة S' نجد :

$$\left.\begin{aligned} J_1 \omega'_1 + (J_3 - J_2)\,\omega_2 \omega_3 &= \Lambda_1 \\ J_2 \omega'_2 + (J_1 - J_3)\,\omega_3 \omega_1 &= \Lambda_2 \\ J_3 \omega'_3 + (J_2 - J_1)\,\omega_1 \omega_2 &= \Lambda_3 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

تسمى هذه المعادلات الثلاث بمعادلات اولير . وحلها يعين شعاع الدوران $\vec{\omega}$ في أية لحظة زمنية t . وبتعبير آخر هذا الحل يعين الحركة . إلا أننا على كل حال لن نحل هذه المعادلات مباشرة بل سنستخدمها في حالات مختلفه للحصول على معادلات أخرى قد تكون أسهل حلاً .

VII – المستقيم والمستوي اللامتحولان في حالة انعدام العزم الحاصل :

لنعتبر الحالة التي يكون فيها العزم الحاصل $\vec{\Lambda}$ معدوماً . ففي هذه الحالة تدلنا العلاقة (33) على ان الاندفاع الزاوي ثابت في الجملة الفراغيـة S . إذن :

$$\vec{\Omega} = \text{const} \tag{35}$$

بالاضافـة الى ذلك ، اذا ضربنا العـلاقات (34) بـ ω_1 ، ω_2 ، ω_3 على الترتيب وجمعناها نجد :

$$J_1 \; \omega_1 \, \omega_1' + J_2 \; \omega_2 \, \omega_2' + J_3 \; \omega_3 \, \omega_3' = 0$$

أو :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[J_1 \, \omega_1^2 + J_2 \, \omega_2^2 + J_3 \, \omega_3^2 \right] = \frac{dT}{dt} = 0$$

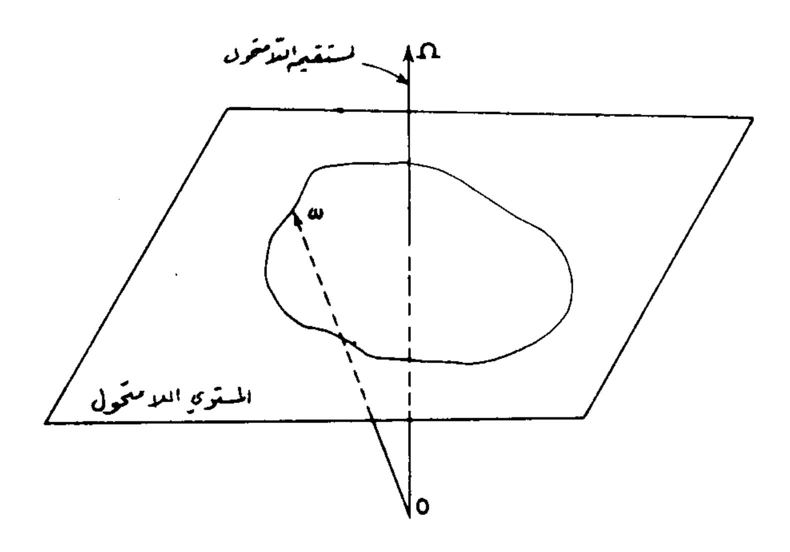
أو :

$$T = \frac{1}{2} \, \vec{\omega} \cdot \vec{\Omega} = \text{const} \tag{36}$$

ولعـل من الواضـح من العلاقـة الاخيرة ان مركبة $\vec{\omega}$ على $\vec{\Omega}$ ثابتة .

وهذا يدل على أن رأس الشعاع $\vec{\omega}$ يقع دوماً في مستو ثابت متعامد مع $\vec{\Omega}$.

يسمى حامل الشعاع الثابت $\vec{\Omega}$ بالمستقيم اللامتحول كما يسمى المستوي آنف الذكر بالمستوي اللامتحول . انظر الشكل (2) .



الشكل (2)

VIII ـ حركة الجسم المتناظر ـ مخروط الجسم ومخروط الفراغ :

ليكن الجسم المتحرك متناظراً بالنسبة لمحور منه . ولنختر جملة مقارنة متماسكة مع الجسم $ox'y'z'$ بحيث ينطبق احد محاورها وليكن oz' على محور تناظر الجسم . وسنفرض ان الجسم يدور بحيث تبقى نقطة منه ثابتة ، وان القوى المؤثرة فيه هي بحيث يكون عزمها الحاصل حول تلك النقطة معدوماً . أي $\vec{\Lambda} = 0$.

إذا كانت $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$ و $\vec{e_3}$ اشعة واحـدة الجملة $ox' y' z'$ وكانت J_1 و J_2 و J_3 عزوم المطالة حول محاورها بالترتيب فان $J_1 = J_2 \neq J_3$ نظراً لتناظر الجسم ولكون الجملة تشكل المحاور الرئيسية للجسم . وتصبح معادلات اولير للحركة عندئذ كما يلي :

$$J_1 \omega_1' + (J_3 - J_1) \omega_2 \omega_3 = 0 \tag{37}$$

$$J_1 \omega_2' + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \tag{38}$$

$$J_3 \omega_3' = 0 \tag{39}$$

نجد بسهولة من (39) أن :

$$\omega_3 = A = \text{ثابت} \tag{40}$$

وتصبح العلاقتان (37) و (38) كما يلي :

$$\omega_1' + \frac{J_3 - J_1}{J_1} A \omega_2 = 0 \tag{41}$$

$$\omega_2' + \frac{J_1 - J_3}{J_1} A \omega_1 = 0 \tag{42}$$

ومنها نجد :

$$\omega_2'' + k^2 \omega_2 = 0 , \quad k = \left| \frac{J_3 - J_1}{J_1} \right| A \tag{43}$$

وحل هذه المعادلة التفاضلية هو :

$$\omega_2 = B \cos k t + C \sin k t \tag{44}$$

واذا اخترنا شروط البدء بحيث تكون $\omega_2 = 0$ عندما $t = 0$ فان $B = 0$ وبالتالي :

$$\omega_2 = C \sin kt \qquad (45)$$

كما نجد بطريقة مماثلة أن :

$$\omega_1 = C \cos kt \qquad (46)$$

وأخيراً فان شماع الدوران $\vec{\omega}$ يعطى بالعلاقة

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega_1 \vec{e_1} + \omega_2 \vec{e_2} + \omega_3 \vec{e_3} \\ &= C \cos kt \, \vec{e_1} + C \sin kt \, \vec{e_2} + A\vec{e_3} \end{aligned} \qquad (47)$$

والجدير بالملاحظة هنا هو أن :

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^2 + \omega_2^2 &= C^2 && (\text{ثابت}) \\ \omega_3 &= A && (\text{ثابت}) \\ \omega &= |\omega| = \sqrt{A^2 + C^2} && (\text{ثابت}) \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

نستنتج من ذلك ان شماع الدوران $\vec{\omega}$ يرسم مخروطاً دورانياً حول المحور oz' بسرعة زاوية ثابتة k . وهذا المخروط ثابت في جملة الجسم $ox'\,y'\,z'$ ولذا يسمى « بمخروط الجسم » انظر الشكل (3) .

الشكل (3)

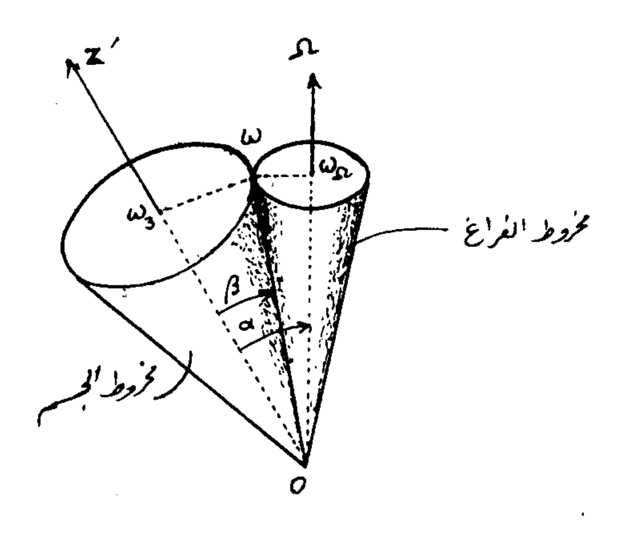
هذا وقد وجدنا سابقاً ان الاندفاع الزاوي $\vec{\Omega}$ ثابت في الفراغ وان الجداء الداخلي $\vec{\Omega}$. $\vec{\omega}$ ايضاً ثابت . انظر العلاقتين (35) و (36) . وهذا يدل على أن مسقط $\vec{\omega}$ على الشعاع الثابت $\vec{\Omega}$ ثابت دوماً . ولما كانت $\vec{\omega}$ ثابتة فاننا نستنتج أن $\vec{\omega}$ يرسم مخروطاً دورانياً ثابتاً في الفراغ ومحوره $\vec{\Omega}$. ويسمى هذا المخروط الثابت في الفراغ « بمخروط الفراغ » . وأخيراً يمكننا بالحساب المباشر البسيط أن نرى ان :

$$\vec{\Omega} \cdot (\vec{\omega_3} \wedge \vec{\omega}) = 0 \qquad (49)$$

وهذا يدل على أن $\vec{\omega}$ ، $\vec{\omega_3}$ ، $\vec{\Omega}$ كلها واقعة في مستو واحد . ونتيجة لكل ما سبق نستطيع ان نصل إلى النتيجة التالية وهي ان مخروط الجسم (الذي ترسمه $\vec{\omega}$ في الجملة $ox'y'z'$ المتماسكة مع الجسم) يتدحرج اثناء الحركة على مخروط الفراغ (الثابت في الفراغ والذي ترسمه $\vec{\omega}$ حول $\vec{\Omega}$). وبعبارة اخرى ، ان الحركة تتعين بدحرجة مخروط الجسم على مخروط الفراغ . ولذلك فاننا نسمي مخروط الجسم بالمتدحرج ونسمي مخروط الفراغ بالقاعدة . لمعرفة وضع المخروطين الجسمي والفراغي بالنسبة لبعضها نرمز للزاوية بين oz' و $\vec{\Omega}$ بالرمز α وللزاوية بين oz' و $\vec{\omega}$ بالرمز β . وهاتان الزاويتان تتعينان من العلاقتين :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{\omega_3} \cdot \vec{\Omega}}{|\omega_3||\Omega|} \qquad (50)$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{\omega_3} \cdot \vec{\omega}}{|\omega_3||\omega|} \qquad (51)$$



الشكل (4)

ولما كان :

$$\left.\begin{aligned} \vec{\omega}_3 &= A\vec{e}_3 \\ \vec{\omega} &= C(\cos kt\,\vec{e}_1 + \sin kt\,\vec{e}_3) + A\vec{e}_3 \\ \vec{\Omega} &= CJ_1(\cos kt\,\vec{e}_1 + \sin kt\,\vec{e}_2) + AJ_3\,\vec{e}_3 \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

فاننا نجد بالحساب المباشر ان :

$$\cos\alpha = \frac{J_3 A}{\sqrt{J_1^2 C^2 + J_3^2 A^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + C^2}} \qquad (35)$$

أو :

$$\left.\begin{aligned} \tan\,\alpha &= J_1\,C/J_3\,A \\ \tan\,\beta &= C/A \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

ومنه :

$$\tan\,\alpha\,/\tan\,\beta = J_1/J_3 \tag{55}$$

فاذا كانت $J_1 < J_3$ كانت $\beta < \alpha$ وبالتالي وقع مخروط الفراغ داخل مخروط الجسم كما يبين الشكل (3) . ويقال عندئذ ان مخروط الجسم يتدحرج من الداخل على مخروط الفراغ .

أما اذا كانت $J_1 > J_3$ كانت $\beta > \alpha$ وبالتالي وقع مخروط الفراغ خارج مخروط الجسم كما يبين الشكل (4) . ويقال عندئذ ان مخروط الجسم يتدحرج من الخارج على مخروط الفراغ .

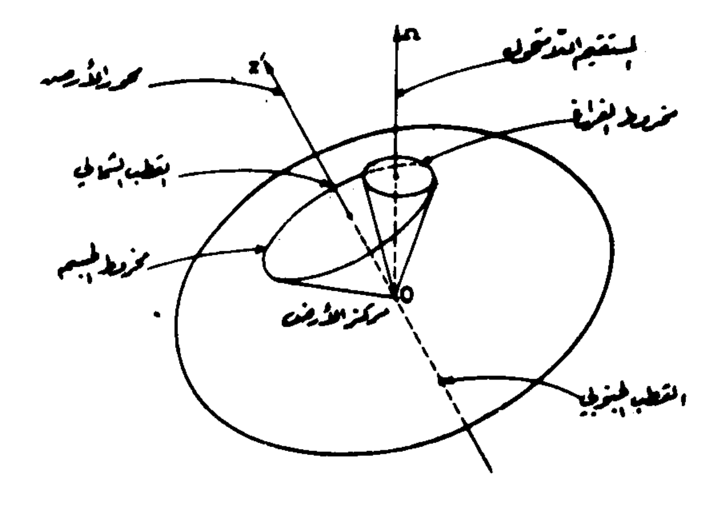
IX — تطبيق : حركة الارض :

من المعلوم ان حركة الأرض في الفراغ تتألف من حركتين رئيسيتين الأولى حركة مركز كتلتها حول الشمس (وقد سبق ان عالجنا مثل هذه الحركة بالتفصيل) والثانية حركتها الدورانية حول مركز كتلتها . وهذه الأخيرة هي موضع اهتمامنا الآن . ولما كانت القوة الوحيدة المؤثرة بالأرض (وهي قوة جـذب الشمس لها) تمر من مركز الكتـلة C الذي يفرض منطبقاً على 0 فان العزم الحاصل معـدوم أي $\vec{\Lambda} \doteq 0$. وبما ان الأرض متناظرة بالنسبة لمحورها فان $J_1 = J_2$. ولهذا كله فان الدراسة التي أتينا على تفصيلها في الفقرة السابقة تنطبق على حركة الأرض الدورانية تماماً .

نلاحظ بشكل خاص ان $J_1 < J_3$ لأن الأرض مفلطحة عند الاستواء . ولذلك فان مخروطها الجسمي يتدحرج من الداخل على مخروطها الفراغي ،

انظر الشكل (5) . بالاضافة الى ذلك فان مسقط شعاع الدوران ω على الشعاع الثابت Ω يعطى بالعلاقة :

$$\omega_\Omega = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}}{|\Omega|}$$



الشكل (5)

$$\omega_\Omega = \frac{C^2 J_1 + A^2 J_3}{\sqrt{C^2 J_1^2 + A^2 J_3^2}} \qquad (56)$$

مما يدل على أن للأرض حركة دورانية منتظمة حول المحور الثابت في الفراغ

$\vec{\Omega}$. وهـذه الحركة الدورانية تسمى « بحركة المبادرة » للأرض . انظر الشكل (5) . ودور هذه الحركة هو نفس دور شعاع الدوران $\vec{\omega}$ أي :

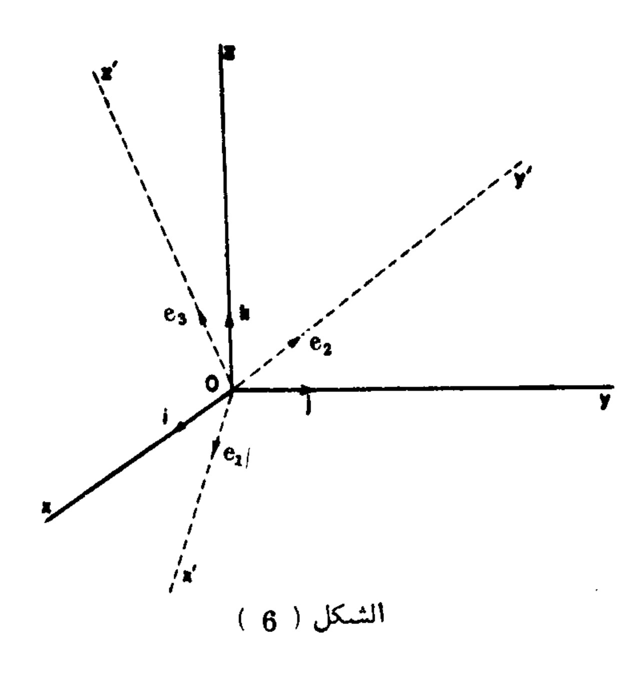
$$P = 2\pi / k = \frac{2\pi}{A} \frac{J_1}{J_1 - J_3} = 305 \quad \text{days} \tag{57}$$

والقيمة 305 للدور مستنتجة من الحساب المباشر . وقـد وجـد ان دور حركة المبادرة للأرض هو حوالي 430 يوماً . ويعلل الفرق بكون الأرض غير صلبة بكاملها بل تشغل البحار السائلة جزءاً كبيراً من كتلتها .

X — زوايـا اولر :

لقد كنا نعالج الحركة الدورانية حتى الآن بدلالة مركبات شعاع الدوران على محاور الجملة $ox'\,y'\,z'$ المتماسكة مع الجسم الدائر. وهذه المعالجة لا تلقي ضوءاً ساطعاً على نوعية الحركة وخواصها . وحتى يتحقق ذلك يجب ان ندرس الحركة بالنسبة لجملة عطالية $ox\,y\,z$ مباشرة . ويكافيء هذا القول ان من الواجب الآن ربط شعاع الدوران بالجملة العطالية . وبعبارة أخرى يجب التفتيش عن زوايا الدوران المناسبة بحيث تظهر الصلة بين الجملة المتحركة والجملة العطالية . لذلك سنفتش عن الزوايا التي يدورها الجسم من وضع تكون فيه جملة المحاور $ox'_0\,y'_0\,z'_0$ (وهي محاور عطالته الرئيسية) منطبقة على الجملة العطالية $oxyz$ الى وضع جديد ما $ox'y'z'$. ولـما كان وضع الجسم الدائر يتعين بثلاثة متحولات مستقلة فان من الواضح ان الزوايا التي نفتش عنها هي ثلاث وبالتالي هناك ثلاث عمليات دوران لـ $ox'_0\,y'_0\,z'_0$ (أو $oxyz$) حتى تنطبق على $ox'y'z'$.

لتكن الجملة العطالية $oxyz$ والجملة الدائرة المتماسكة مع الجسم $ox'y'z'$ وذلك في لحظة ما t . سنقوم بتدوير $oxyz$ بثلاث زوايا على ثلاث مراحل



الشكل (6)

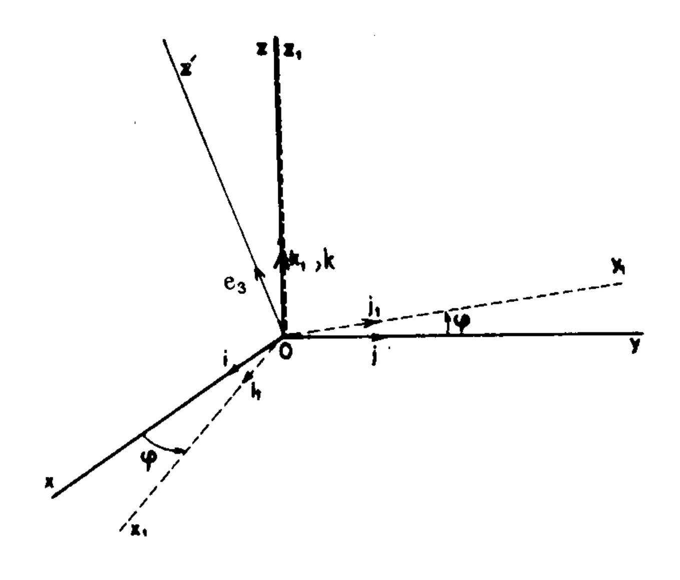
بحيث تؤدي هذه الدورانات الى $ox'y'z'$. انظر الشكل (6) .

1) **الدوران الاول :**

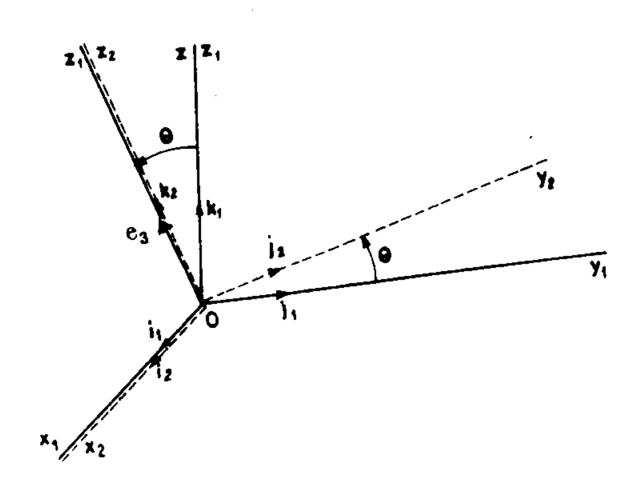
ندور $oxyz$ بزاوية φ حول المحور oz الى الوضع $ox_1y_1z_1$ بحيث يكون ox_1 متعامداً مع كل من oz' و oz_1 (المنطبق على oz). وعندئذ تكون لدينا العلاقات التالية بين أشعة الواحدة :

$$\left.\begin{aligned} \vec{i} &= \vec{i}_1 \cos\varphi - \vec{j}_1 \sin\varphi \\ \vec{j} &= \vec{i}_1 \sin\varphi + \vec{j}_1 \cos\varphi \\ \vec{k} &= \vec{k}_1 \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

يبين ذلك الشكل (7) .



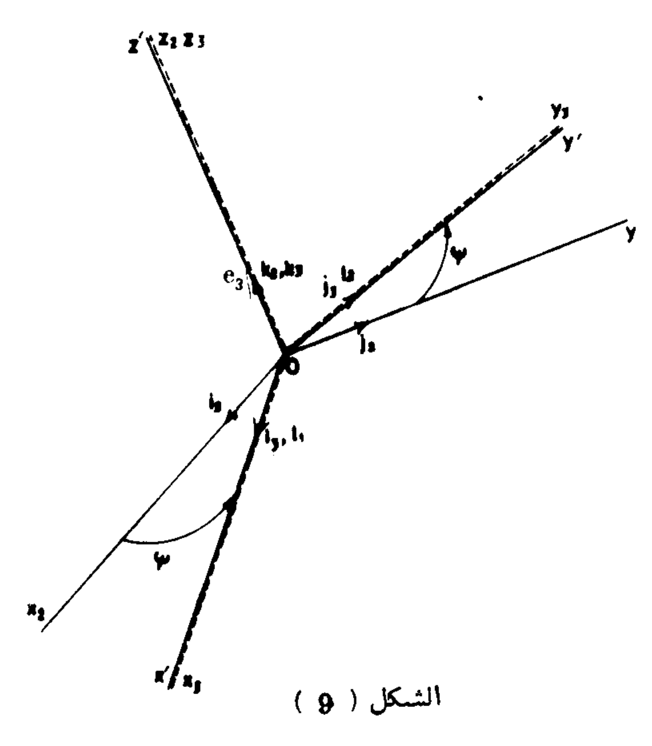
الشكل (7)



الشكل (8)

2) **الدوران الثاني :**

لتكن Θ الزاوية الكائنة بين oz_1 و oz' . ولندور $ox_1\ y_1\ z_1$ الى جديد $ox_2\ y_2\ z_2$ بزاوية Θ حول ox_1 وعندئذ ينطبق oz_2 على oz'



الشكل (9)

ox_1 متعامد مع oz_1 و oz' . والعلاقات التي تربط أشعة الواحدة عندئذ هي :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i}_1 = \vec{i}_2 \\ \vec{j}_1 = \vec{j}_2 \cos\Theta - \vec{k}_2 \sin\Theta \\ \vec{k}_1 = \vec{j}_2 \sin\Theta + \vec{k}_2 \cos\Theta\end{array}\right\} \quad (59)$$

انظر الشكل (8) . ونتيجة لهذا التدوير الذي أدى إلى انطباق oz_2 على oz' تكون المحاور ox_2 ، oy_2 ، ox' ، oy' في مستو واحد . ولتكن ψ الزاوية الكائنة بين ox_2 و ox' او بين oy_2 و oy' .

3) **الدوران الثالث :**

لما كانت المحاور ox_2 ، oy_2 ، ox' ، oy' في مستو واحد . وكان

لها نفس المبدأ o فان من الواضح أن تدوير $ox_2 y_2 z_2$ الى الوضع $ox_3 y_3 z_3$ بالزاوية ψ حول oz_2 يؤدي إلى انطباق $ox_3 y_3 z_3$ على $ox' y' z'$.
وعندئذ علاقات أشعة الواحدة هي :

$$\left.\begin{aligned} \vec{i}_2 &= \vec{i}_3 \cos\psi - \vec{j}_3 \sin\psi \\ \vec{j}_2 &= \vec{i}_3 \sin\psi + \vec{j}_3 \cos\psi \\ \vec{k}_2 &= \vec{k}_3 \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

وذلك كما يبين الشكل (9) . وبالاضافة الى ذلك ، ولما كانت $ox_3 y_3 z_3$ منطبقة على $ox'y'z'$ فان لدينا العلاقات التالية :

$$\vec{i}_3 = \vec{e}_1 \quad \text{و} \quad \vec{j}_3 = \vec{e}_2 \quad \text{و} \quad \vec{k}_3 = \vec{e}_3 \qquad (61)$$

وهكذا فان هذه الدورانات الثلاثة وفق الزوايا φ ، Θ ، ψ تعين وضع الجسم بالنسبة للجملة العطالية $ox\,yz$. وتسمى هذه الزوايا بزوايا أولير .

XI — تعيين مركبات شعاع الدوران بدلالة زوايا اولير :

لقد رأينا في الفقرة الأخيرة أن دوران الجسم يتعين بثلاثة دورانات :

الأول حول oz بزاوية φ او بسرعة زاوية φ'

الثاني حول ox_1 بزاوية Θ او بسرعة زاوية Θ'

الثالث حول oz_2 بزاوية ψ او بسرعة زاوية ψ'

ولذا فان شعاع الدوران ω يكتب بالشكل التالي :

$$\vec{\omega} = \varphi'\vec{k} + \Theta'\,\vec{i}_1 + \psi'\vec{k}_2 \qquad (62)$$

ومن جهة ثانية وجدنا ان

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e_1} + \omega_2 \vec{e_2} + \omega_3 \vec{e_3} \tag{63}$$

فاذا حسبنا $\vec{k}$ ، $\vec{i_1}$ ، $\vec{k_2}$ بدلالة $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$ و $\vec{e_3}$ و φ و θ و ψ من العلاقات (58) — (61) وعوضنا في العلاقة (62) ثم قارنا العلاقة الناتجة بالعلاقة (63) فاننا نجد :

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \varphi' \sin \Theta \sin \psi + \Theta' \cos \psi \\ \omega_2 &= \varphi' \sin \Theta \cos \psi - \Theta' \sin \psi \\ \omega_3 &= \varphi' \cos\Theta + \psi' \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

هذه العلاقات تربط بين زوايا اولير (التي تعين وضع الجسم) ومركبات شعاع الدوران (السرعة الزاوية) ω_1 و ω_2 و ω_3 على محاور العطالة الرئيسية للجسم . ويجب الا يغيب عن الذهن أن ω_1 و ω_2 و ω_3 تحقق معادلات اولير وتتعين منها . انظر العلاقات (34) .

XII — دراسة الحركة بدلالة زوايا اولير :

ان معادلات أولير (34) هي معادلات تفاضلية تعين لنا مركبات شعاع الدوران بدلالة الزمن . كما ان المعادلات (64) تربط بين هذه المركبات وزوايا اولير وحلها يؤدي إلى تعيين هذه الزوايا بدلالة الزمن ، أي يؤدي الى تعيين وضع الجسم الدائر . ولذلك يمكننا ان نلخص كل ما سبق بأن معادلات الحركة الدورانية بصورة عامة هي :

$$
\left.\begin{aligned}
J_1\,\omega'_1 + (J_3 - J_2)\,\omega_2\,\omega_3 &= \Lambda_1 \\
J_2\,\omega'_2 + (J_1 - J_3)\,\omega_3\,\omega_1 &= \Lambda_2 \\
J_3\,\omega'_3 + (J_2 - J_1)\,\omega_1\,\omega_2 &= \Lambda_3 \\
\varphi' \sin\theta \sin\psi + \theta' \cos\psi &= \omega_1 \\
\varphi' \sin\theta \cos\psi - \theta' \sin\psi &= \omega_2 \\
\varphi' \cos\theta + \psi' &= \omega_3
\end{aligned}\right\} \quad (65)
$$

ودراسة الحركة تتم بحل هذه المعادلات المترافقة لتعيين زوايا اوليو بدلالة الزمن .

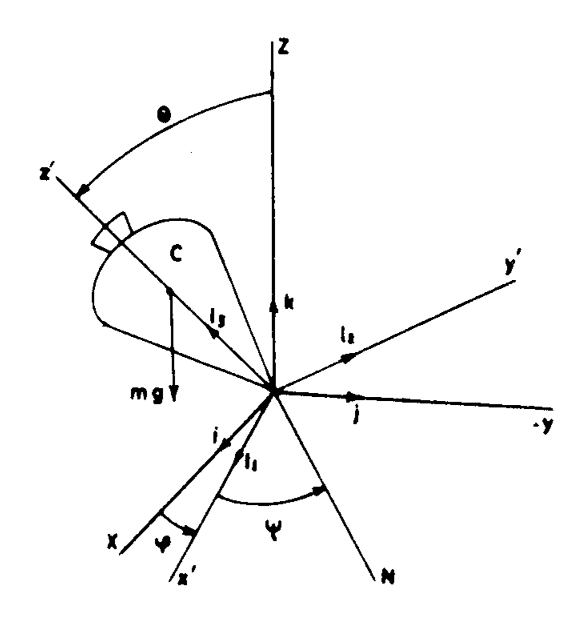
XIII — حركة الدوامة الجيروسكوبية :

ان دراسة حركة الدوامة المتناظرة من أشهر المسائل التقليدية لحركة الجسم الصلب . وقد لقيت اهتماماً كبيراً من قبل جميع المهتمين في أبحاث تحريك الجسم الصلب ، حتى ان ابحاث بعض العلماء في هذا الموضوع شملت مجلدات بكاملها . وحركة الدوامة من أشهر الحركات الجيروسكوبية التي تتميز بانها حركة جسم صلب متناظر يدور بسرعة كبيرة حول محور تناظره . وقبل معالجة هذا الموضوع بصورة رياضية نرى ضرورياً ان نلقي نظرة بسيطة على حركة الدوامة كظاهرة فيزيائية قد تدعو الى الدهشة والاستغراب. إذا تأملنا الدوامة اثناء حركتها العامة نرى انها تدور حول محورها بسرعة زاوية كبيرة يطلق عليها اسم حركة البرم او الالتفاف (spin) . وبالاضافة الى ذلك فان محور تناظرها يدور ببطء حول الشاقول . وتسمى حركته هذه بحركة المبادرة (Precession) . وفوق ذلك فان هناك حركة ثانية لمحور تناظر الدوامة ترافق حركة المبادرة وهي ان محور التناظر هذا يبتعد ويقترب من الشاقول (يتأرجح) اثناء دورانه حول الشاقول . ونقول ان ان الدوامة تترنح بالنسبة للشاقول . ولذا تسمى هذه الحركة الاخيرة بحركة

الترنح (nutation) . ولعل المتأمل في حركة الدوامة يتساءل عن حركتي المبادرة والترنح ويطلب تفسيراً علمياً لها، في حين انه يستطيع بكل بساطة أن يفسر حركة الالتفاف التي تنتج عن مؤثر خارجي ابتدائي ، إذ أننا بطريقة ما نعطي الدوامة حركة التفاف ابتدائية . ولكن الذي يدعو الى الدهشة والاستغراب اكثر من ذلك كله هو السؤال التالي : « لماذا لا تقع الدوامة على الأرض بتأثير قوة ثقلها » ؟ ان جميع هذه التساؤلات لا يمكن الاجابة عليها فيزيائياً إلا بعد معالجة رياضية مستفيضة وفهم هذه المعالجة من وجهة النظر الفيزيائية . لذا سنعمد إلى اشتقاق المعادلات الرياضية التي تعين الحركة ونناقش حل هذه المعادلات . وعندئذ يمكن ان نحاول الاجابة عن جميع هذه التساؤلات . سنشتق الآن معادلات حركة الدوامة بدلالة زوايا اولير بطريقتين .

آ) معادلات الحركة ـ طريقة اولى :

يبين الشكل (10) الجملة العطالية oxyz وجملة دائرة لاعطالية $ox'y'z'$ التي ينطبق محورها الثالث oz' على محور تناظر الدوامة . ومن الواضح اذن ان محاور هذه الجملة الاخيرة تشكل محاور عطالة رئيسية للدوامة . كما يبين الشكل ايضاً زوايا اولير φ و Θ و ψ . سنختار وضع الجملة $ox'y'z'$ بحيث تكون المحاور oz و oz' و oy' في مستو واحد، وعندئذ تكون المحاور ox و ox' و oy في مستو واحد ايضاً . وسنفرض اخيراً ان المستقيم oN متماسك مع الدوامة ومتعامد مع محورها oz' . ويمكن الآن ان نعتبر حركة الدوامة مؤلفة من حركتين . الأولى حركة التفافها حول المحور oz' والتي سرعتها الزاوية هي $\overrightarrow{S\, e_3} = \psi' \overrightarrow{e_3}$ المحمولة على oz' وهذه الحركة هي الحركة النسبية للدوامة بالنسبة للجملة $ox'\, y'\, z'$. أما



الشكل (10)

الحركة الثانية فهي حركة الجملة $ox'\,y'\,z'$ بالنسبة للجملة المطالية $ox\,yz$.
اذن يمكننا ان نرى بسهولة ان شعاع دوران الجملة $ox'\,y'\,z'$ هو :

$$\vec{\omega} = \omega_1\,\vec{e}_1 + \omega_2\,\vec{e}_2 + \omega_3\,\vec{e}_3 \qquad (66)$$

بينما شعاع دوران الدوامة هو

$$\vec{\omega}_t = \vec{\omega} + S\,\vec{e}_3 = \omega_1\,\vec{e}_1 + \omega_2\,\vec{e}_2 + (\omega_3 + S)\,\vec{e}_3 \qquad (67)$$

حيث في هذه الحالة

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \Theta' \\ \omega_2 &= \varphi'\sin\Theta \\ \omega_3 &= \varphi'\cos\Theta \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

وقد نتجت هذه العلاقات من العلاقات (46) بعد ملاحظة ان $\psi = 0$ وان

$S = \psi'$ قد الحقت بالدوامة بشكل منفصل واعتبرت كحركة دورانية لها بالنسبة للجملة الدوارة $ox'\,y'\,z'$. لكتابة معادلات الحركة نطبق نظرية الاندفاع الزاوي في الجملة المطالية أي :

$$\vec{\Lambda} = d\vec{\Omega}/dt\Big|_I = d\vec{\Omega}/dt + \vec{\omega} \wedge \vec{\Omega} \tag{69}$$

حيث :

$$\vec{\Lambda} = \left(L\,\vec{e}_3\right) \wedge \left(-mg\,\vec{k}\right) = mg\,L\sin\Theta\,\vec{e}_1 \tag{70}$$

$$\vec{\Omega} = J_1\,\omega_1\,\vec{e}_1 + J_2\,\omega_2\,\vec{e}_2 + J_3\,(\omega_3 + S)\,\vec{e}_3 \tag{71}$$

وبالحساب المباشر وبملاحظة أن $J_2 = J_1$ نجد :

$$J_1\,\omega_1' + \left(J_3 - J_1\right)\omega_2\,\omega_3 + J_3\,\omega_2\,S = mg\,L\sin\Theta \tag{72}$$

$$J_1\,\omega_2' + \left(J_1 - J_3\right)\omega_3\,\omega_1 - J_3\,\omega_1\,S = 0 \tag{73}$$

$$J_3\left(\omega_3' + S'\right) = 0 \tag{74}$$

ونرى ببساطة من العلاقة الأخيرة أن

$$\omega_3 + S = A\ (\text{ثابت}) \quad \text{او} \quad S = A - \omega_3 \tag{75}$$

اذا ضربنا العلاقة (72) بـ ω_1 والعلاقة (73) بـ ω_2 والعلاقـة (74) بـ $(\omega_3 + S)$ وجمعنا العلاقات الناتجة نجد :

$$J_2\left(\omega_1\,\omega_1' + \omega_2\omega_2'\right) + J_3\left(\omega_3 + S\right)\left(\omega_3' + S'\right) - mg\,L\sin\Theta\,\omega_1 = 0$$

وبملاحظة أن $\omega_1 = \Theta'$ ومكاملة العلاقة الأخيرة نجد أن

$$\tfrac{1}{2}\,J_1\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + \tfrac{1}{2}\,J_3\left(\omega_3 + S\right)^2 + mg\,L\cos\Theta = E\ (\text{ثابت})$$

وبالتعويض من (68) و (75) نجد :

$$\tfrac{1}{2}J_1\left(\Theta'^2 + \varphi'^2\sin^2\Theta\right) + \tfrac{1}{2}J_3A^2 + mg\,L\cos\Theta = E \tag{76}$$

والآن اذا عدنا إلى المعادلة (73) وعوضنا فيها عن S بـ $A - \omega_3$ فانها تصبح

$$J_1 \omega_2' + J_1 \omega_3 \omega_1 - J_3 A \omega_1 = 0 \qquad (77)$$

واستعمال العلاقات (68) في (77) وضربها بـ $\sin \Theta$ ومكاملتها نجد

$$J_1 \varphi'^2 \sin^2 \Theta + J_3 A \cos \Theta = K \ (\text{ثابت}) \qquad (78)$$

نلاحظ ان (76) و (78) معادلتان تفاضليتان تمطيان φ و Θ اما المادلة (75) والتي تكتب

$$\psi' = S = A - \omega_3 = A - \varphi' \cos \Theta \qquad (79)$$

فانها تعين ψ أو S بعد معرفة φ و Θ .

اذن المعادلات (76) و (78) و (79) كافية لتعيين φ و Θ و ψ أي كافية لتعيين الحركة ولذا فهي معادلات الحركة . أما الثابتان E و K فيمكن تعيينها من شروط البدء. وسنرى في الطريقة الثانية ان E هي الطاقة الكلية للدوامة وان K هي مركبة الاندفاع الزاوي على المحور الشاقولي oz .

ب) معادلات الحركة ـ طريقة ثانية :

يمكن أن نشتق معادلات الحركة بطريقة قصيرة ومباشرة وتستند الى اساس فيزيائي بحت . وعلى وجه الدقـة تستند هذه الطريقـة الى استعمال مبدأي انحفاظ الطاقة والاندفاع الزاوي .

لما كانت القوة المؤثرة (الثقل) مشتقة من كمون فان الطاقة الكلية E (وهي مجموع الطاقتين الحركية T والكامنة V) ثابتة . أي

$$T + V = E \ (\text{ثابت}) \qquad (80)$$

هذا من جهة ، ومن جهة ثانية فان عزم القوى المؤثرة على الجسم (قوة الثقل وقوة رد الفعل) واقعة في المستوى الشاقولي الذي يحوي oz و oy' وبالتـالي فان العزم $\vec{\Lambda}$ محمول على ox' اي على $\vec{e_1}$. وله اذن مركبتان

معدومتان على كل من oz' و oz . ويدل ذلك على ان للاندفاع الزاوي مركبتين ثابتتين على هذين المحورين .
اذن :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{e_3} = C \text{ (ثابت)} \tag{81}$$

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{k} = K \text{ (ثابت)} \tag{82}$$

للحصول على معادلات الحركة نستعمل الملاقات الثلاث الاخيرة بعد حساب T و V و $\vec{\Omega}$.

$$V = mg\, L \cos\Theta \tag{83}$$

$$\vec{\Omega} = J_1 \omega_1 \vec{e_1} + J_1 \omega_2 \vec{e_2} + J_3 (\omega_3 + S) \vec{e_3} \tag{84}$$

$$T = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 (\omega_3 + S)^2 \tag{85}$$

باستعمال هذه الملاقات في الملاقات (80) و (81) و (82) نجد :

$$\omega_1 + S = C / J_3 = A \text{ (ثابت)} \tag{86}$$

$$J_1 \omega_2 \sin \Theta + J_3 (\omega_3 + S) \cos \Theta = K \tag{87}$$

$$\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 (\omega_3 + S)^2 + m L g \cos \Theta = E \tag{88}$$

واخيراً باستعمال الملاقات (60) في الملاقات الاخيرة نجد :

$$\omega_3 + S = \varphi' \cos \omega + \psi' = A \tag{89}$$

$$J_1 \varphi' \sin^2 \Theta + J_3 A \cos \Theta = K \tag{90}$$

$$\frac{1}{2} J_1 (\omega'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \Theta) + \frac{1}{2} J_3 A^2 + mg L \cos \Theta = E \tag{91}$$

ونلاحظ ان هذه المعادلات هي نفس المعادلات (75) و (78) و (76) التي وجدناها سابقاً بالطريقة الاولى . وهـذه المعادلات الثلاث تعين لنـا الحركة لأن حلها يعين φ و Θ و ψ . وسنحاول دراسة الحركة من المعادلات الاخيرة .

ج) دراسة الحركة :

نلاحظ بادىء الامر ان الملاقـة (89) تعين لنا $S = \psi'$ وبالتـالي ψ

فيما اذا علمنا φ و Θ . وهاتان الاخيرتان تتعينان بحل العلاقتين المترافقتين (90) و (91) . لتسهيل حل هاتين المعادلتين سنجري تغييراً مؤقتاً في المتحول Θ بالشكل التالي :

$$u = \cos\Theta \tag{92}$$

ويمكن بالحساب المباشر ان نجد العلاقات التالية :

$$\varphi' = \frac{\gamma - \delta u}{1 - u^2} \tag{93}$$

$$u'^2 = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = f(u) \tag{94}$$

حيث :

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 2(E - \tfrac{1}{2} J_3 A^2)/J_1 \\ \beta &= 2\, mg L / J_1 \\ \gamma &= K/J_1 \\ \delta &= A\, J_3/J_1 \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

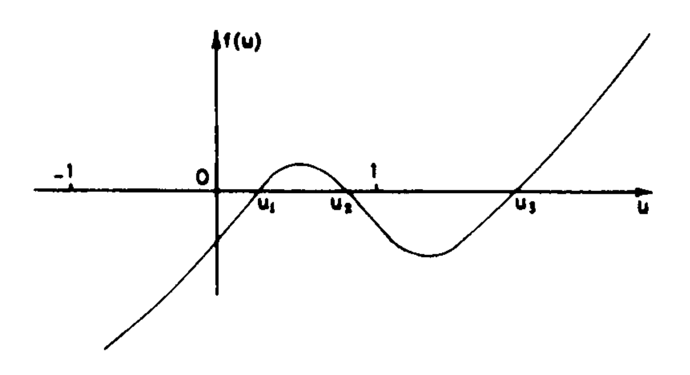
وبصورة عامة ان حل المعادلة (94) يعين u وبالتالي Θ . وعندئذ يعطي حل المعادلة (93) الزاوية φ . الا اننا لن نلجأ الى حل هاتين العلاقتين مباشرة بل سنناقش الحركة بشكل غير مباشر وبدون حل هاتين المعادلين .

نلاحظ قبل كل شيء ان $u' = \sin\Theta . \Theta'$ وان $\Theta' = 0$ عندما $u' = 0$. اي عندما :

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = 0 \tag{96}$$

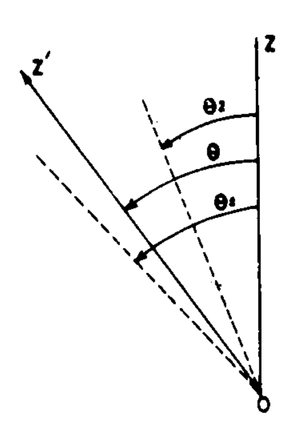
وهذه المعادلة هي من الدرجة الثالثة بالنسبة لـ u ولها بصورة عامة ثلاثة جذور u_1 و u_2 و u_3 . ولما كان $-1 \leqslant u = \cos\Theta \leqslant +1$ فان الجذور المقبولة للمعادلة الاخيرة يجب أن تقع في المجال $(-1, 1)$. ولمعرفة ما إذا كانت هذه الجذور او بعضها يحقق هذا الشرط يمكننا أن نأخذ فكرة تقريبية عن التابع $f(u)$ بحساب بعض قيمه الخاصة من أجل بعض القيم لـ u . فنرى بسهوله مثلا ان :

$$f(-\infty) = -\infty$$
$$f(-1) = -(\gamma - \delta)^2 < 0$$
$$f(+1) = -(\gamma + \delta)^2 < 0$$
$$f(+\infty) = +\infty$$



الشكل (11)

وتدلنا هذه الملاقات على ان الشكل العام للتابع هو كما يبين الشكل (11) . ونرى مباشرة ان أحد الجذور وهو u_3 غير مقبول لأنه أكبر من الواحد. أما الجذران الآخران فمقبولان ان وجدا . ويقابل الجذرين u_1 و u_2 قيمتان Θ_1 و Θ_2 للزاوية Θ . ولما كان $u'^2 = f(u) > 0$ فان الجزء المقبول من التابع $f(u)$ هو الموجب فقط . وبالاضافة الى ذلك فان $-1 < u < +1$ لذلك فان الجزء المقبول للتابع $f(u)$ هو الواقع بين u_1 و u_2 . نستنتج من كل ذلك ان Θ تتحول بين القيمتين Θ_1 و Θ_2 ، كما يبين الشكل (12) .

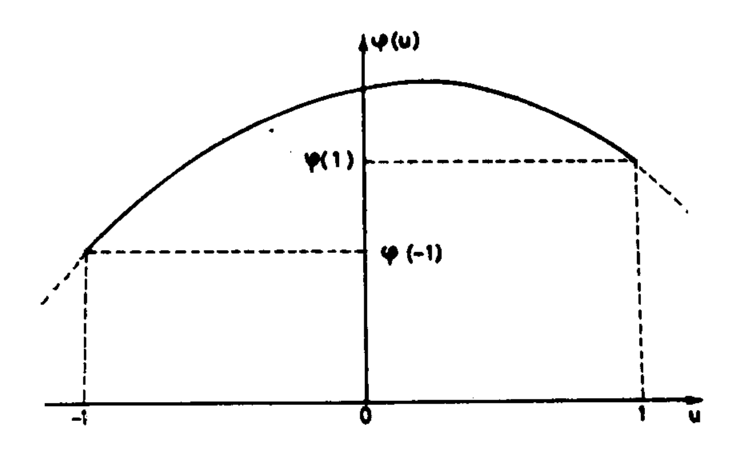


الشكل (12)

لنعد الآن الى العلاقة (93) . نلاحظ من هذه العلاقة أن $\varphi' = o$ عنـدما $u = \gamma / \delta$ وهو مقـدار موجب . وترى ان $\varphi' > o$ عنـدما $u < \gamma / \delta$ وان $\varphi' < 0$ عندما $u > \gamma / \delta$.فتحولات φ يمثلها الشكل (13) .

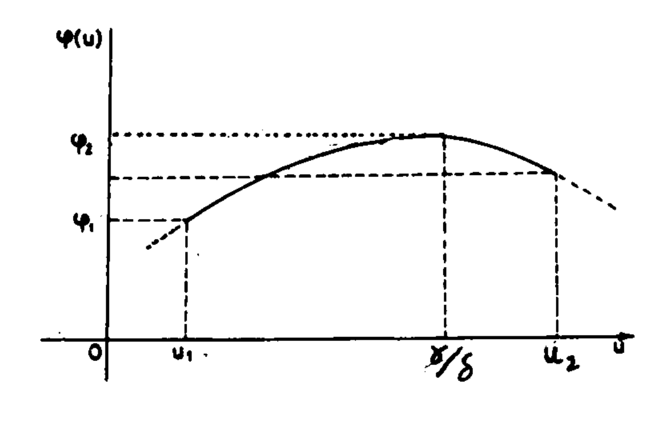
وللدراسة حركة محور الدوامة oz نميز الحالات المختلفة التالية :

اولا : $u_1 < \gamma / \delta < u_2$ في هذه الحالة تتحول Θ بين Θ_1 و Θ_2 وعندئذ تـكون تحولات φ كما يبين الشكل (14) . أما حركة المحور oz' فيمـكن تعيينها بحركة Q نقطة تقاطع هذا المحور مع كرة مركزها o . ويمثلها الشكل (15) . ويجب أن نلاحظ ان φ تزداد من φ_1 حتى تبلغ قيمة عظمى ثم تأخذ بالتناقص الى قيمة اخرى φ_2 . هذا يعني ان المحور oz' يترنح بين Θ_1 و Θ_2 من جهة ويدور (حركة مبادرة) حول المحور oz من جهة أخرى. وفي هذه الحركة الاخيرة تقدم ثم تراجع . ويمثل الجزء المستمر



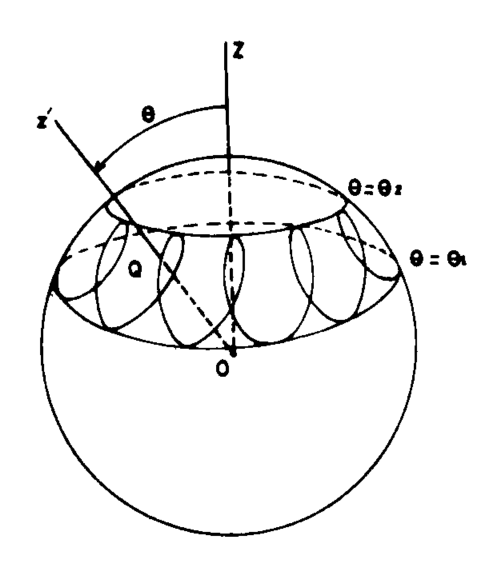
الشكل (13)

من المنحني في الشكل (15) مسار Q عنـدما تتغير Θ من Θ_1 الى Θ_2 ثم



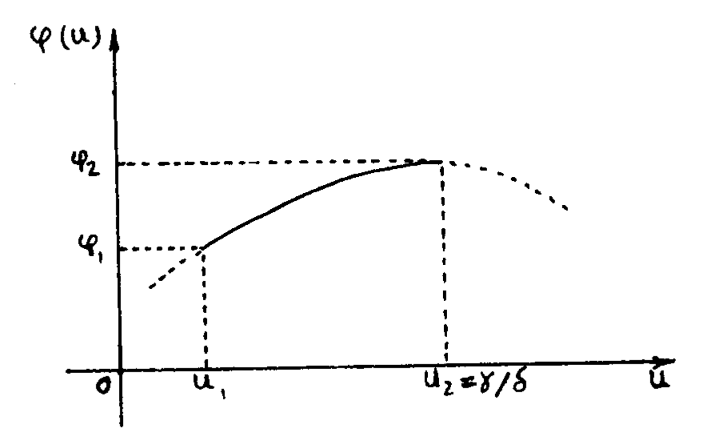
الشكل (14)

تعود من Θ_2 الى Θ_1 . وبعد ذلك تعود الزاويتان Θ و φ فتتغيران من جديد وبصورة دورية ، وهكذا .

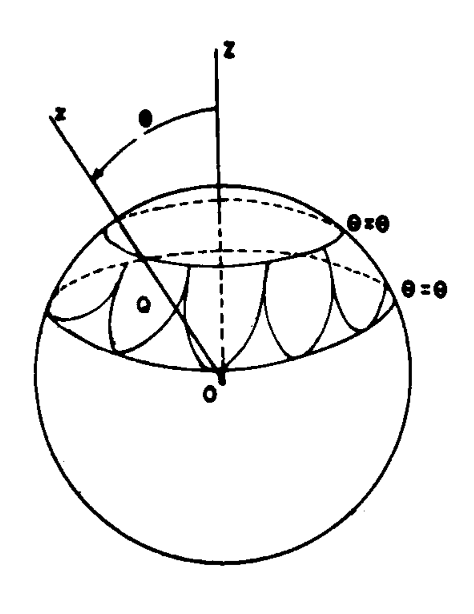


الشـكل (15)

ثانيــا : $u_2 = \gamma/\delta$. في هذه الحالة تكون φ متزايدة بين u_1 و u_2 وتأخذ نهايتها العظمى عند u_2 . وليس في الحركة تراجع بالنسبة لـ φ . ونحصل عندئذ على الشكلين (16) و (17) اللذين يبينان φ وحركة المحور oz_1 .

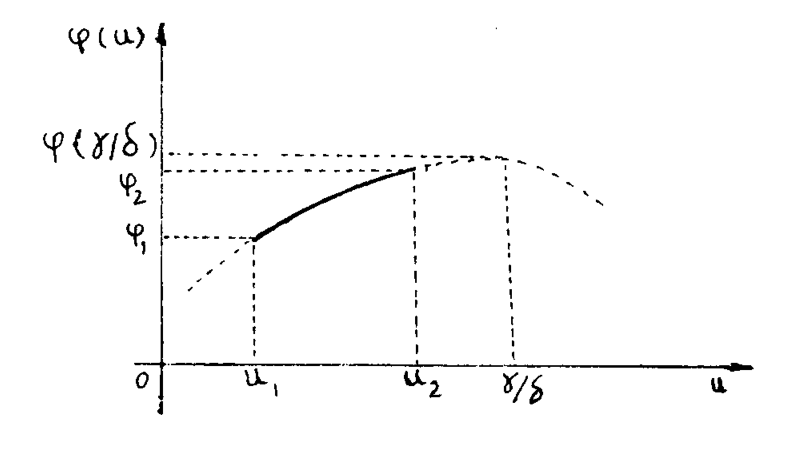


الشكل (16)

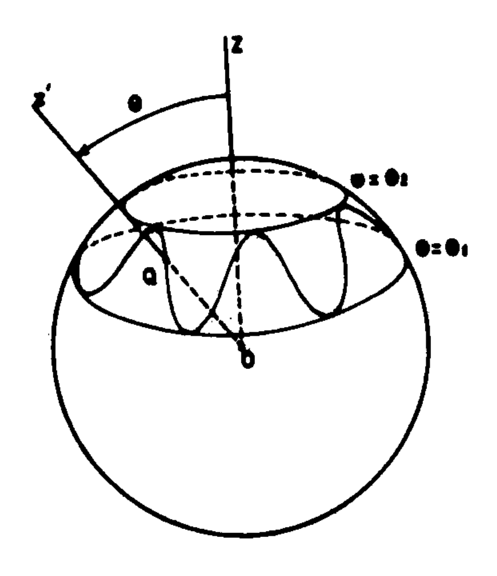


الشكل (17)

ثالثا : $u_2 < \delta / \gamma$ الحركة تقدمية باستمرار بالنسبة لـ φ ولا تبلغ نهاية عظمى في مجال تحولها . ويوافق هذه الحالة الشكلان (18) و (19) .



الشكل (18)



الشكل (19)

ملاحظة : يمكن الحصول على حالات مشابهة لما سبق عندما تكون $\gamma / \delta < u_1$ أو $\gamma / \delta = u_1$ ونترك دراستها للطالب كتمرين .

XIV – تفسير الحركة الجيروسكوبية للدوامة :

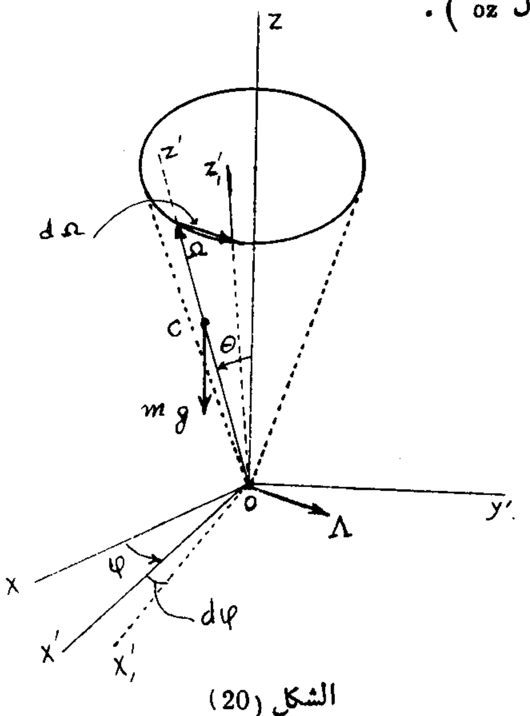
لم نجد صعوبة في فهم دوران الدوامة حول محور تناظرها لأننا أعطينا الدوامة مثل هذه الحركة في البدء . ولكننا تساءلنا عن سبب حركة المبادرة وحركة الترنح وعدم سقوط الدوامة على الأرض بتأثير قوة الثقل . وسنحاول تبسيط الاجابة على هذه التساؤلات .

لنفرض أن الدوامة (او الجيرسكوب) تدور حول محور تناظرها بسرعة كبيرة . عندئذ يمكننا أن نقول ان اندفاعها الزاوي $\vec{\Omega}$ محمول تقريباً في لحظة ما على محورها oz' او على محور قريب جداً منه . ولنفرض

ان المحاور ox و oz و oz′ مستوية في تلك اللحظة . فاذا دار هذا المستوى حول oz زاوية صغيرة $d\varphi$ فان الاندفاع الزاوي يتغير اتجاهه ويبقى ثابتاً بالطول تقريباً . ويساوي هذا التغير :

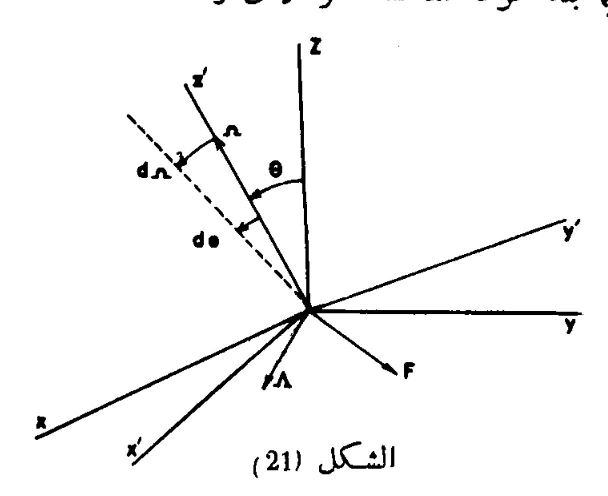
$$| d \vec{\Omega} | = \Omega \sin \Theta \, d \varphi$$

وهذا التغير متعامد مع المستوى (oz ، oz′ ، ox) . ولكن التغير في الاندفاع الزاوي ينشأ عن مزوجة توازي هذا التغير . فالمزدوجة $\vec{\Lambda}$ التي سببت هذا التغير يجب أن تكون متعامدة مع المستوى المذكور ، كما يبين الشكل (20) . وإذا لاحظنا ان قوة الثقل لها مثل هذه المزدوجة امكننا عندئذ ان نفهم السبب في حركة المبادرة (أي حركة محور الدوامة oz′ حول الشاقول oz) .



الشكل (20)

أما حركة الترنح وعدم سقوط الدوامة بتأثير قوة الثقل فتفسران كما يلي .
ان الدوامة تبدأ بالسقوط فعلاً واثناء سقوطها يتغير الاندفاع الزاوي بتأثير هذا السقوط تغيراً واقعاً تقريباً في المستوى الشاقولي (oz و oz′ و ox).
وهذا التغير يجب ان ينتج عن مزدوجة $\vec{\Lambda}$ في نفس المستوي أي عن قوة $\vec{F}$ عمودية على المستوى المذكور . انظر الشكل (21) . ونظراً لعدم وجود مثل هذه القوة فان على الجسم ان يعوض هذه القوة او هذه المزدوجة بطريقة حركية فيتحرك بحيث ينتج تغيراً في الاندفاع الزاوي الذي ينشأ عنه بدوره قوة تعاكس القوة الأولى $\vec{F}$ ، أي أنه يتحرك « يسقط » نحو الأعلى . ويكون بذلك قد قاوم حركة السقوط من جهة وقام بحركة ترنحية واحدة . فاذا استقر تقريباً بعد انعدام القوتين الناتجتين عن سقوطه نحو الأسفل ثم نحو الأعلى ، عاد من جديد وخضع لحركة سقوط جديدة تنشأ عنها فيما بعد حركة معاكسة نحو الأعلى وهكذا .

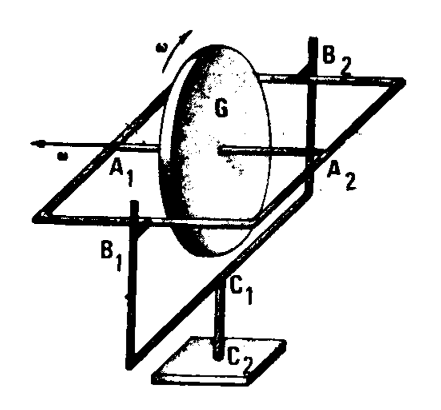


الشكل (21)

XV — الجيروسكوب :

تعد حركة الدوامة التي درسناها من أشهر الحركات الجيروسكوبية .

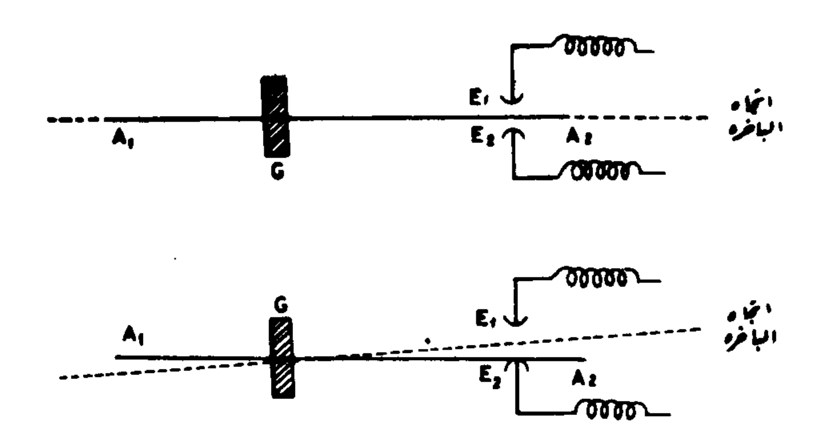
وبصورة عامة ان اي جسم دوراني يدور حول محور تناظره بسرعة كبيرة يسمى جيروسكوبا . ولقد اخترعت كلمة جيروسكوب لتدل على آلة يؤثر عليها دوران الأرض فيحدث تأثيراً ملحوظاً . وتطلق اليوم كلمة جيروسكوب على أية جملة ميكانيكية ذات جسم صلب متناظر ويدور حول محوره بسرعة كبيرة وبحيث يمكنه تغيير اتجاه شعاع دورانه (أو شعاع السرعة الزاوية) بمختلف الاتجاهات . ويمثل الشكل (22) احد الاشكال المبسطة للجيروسكوب .



الشكل (22)

ونلاحظ ان الجيروسكوب G يدور حول المحور $A_1 A_2$ في الاطار الأفقي F . كما ان هذا الاطار يدور حول المحور $B_1 B_2$ في الاطار الشاقولي F′ الذي يمكنه أن يدور حول المحور $C_1 C_2$. وبذلك يكون بامكان الجيروسكوب G ان يأخذ أي اتجاه مهما كان . وعندما يكون الجيروسكوب في حالة استعمال يدور حول محوره بسرعة كبيرة جداً بحيث يكون له اندفاع زاوي $\vec{\Omega}$ كبير ومحمول على محوره $A_1 A_2$. ولما كان الجهاز مصمماً بحيث يبقى مركز ثقله

ثابتاً فان المزدوجة (عزم قوة الثقل) $\vec{\Lambda}$ معدومة وبالتالي فالاندفاع الزاوي $\vec{\Omega}$ محفوظ ، أي أنه ثابت بطوله واتجاهه . وبالتالي فان للمحور A_1A_2 اتجاهاً ثابتاً دوماً ومهما كانت حركة الوسط الموجود فيه .



الشكل (23)

يستفاد من هذه الخاصة باستعمال الجيروسكوب في البواخر والطائرات لتوجيهها باتجاه ثابت كما يبين الشكل (23) . فاذا كان المحور $A_1 A_2$ يشير الى الاتجاه المرغوب للباخرة مثلاً وإذا دارت الباخرة أي إذا غيرت اتجاهها لسبب خاطىء ما او لسبب طبيعي كموجة قوية فان المحور A_1A_2 يبقى ثابتاً . وبالتالي فان الباخرة هي التي تدور فقط . وعندئذ فان المحور A_1A_2 يلامس أحد المربطين E_1 أو E_2 (حسب جهة الدوران) وبالتالي تغلق دارة كهربائية معينة تتصل بجهاز آلي لتصحيح اتجاه الباخرة .

كما يستعمل الجيروسكوب ايضاً لكشف دوران الارض . ويسمى الجهاز المستعمل بالبوصلة الجيروسكوبية وتستخدم هذه البوصلة لمعرفة اتجاه الشمال الحقيقي في مكان ما وفي كشف دوران الارض . ونكتفي بالاشارة فقط الى هذا الجهاز دون تفصيل في كيفية عمله .

الفصل الثاني عشر

ميكانيك لاغرانج

- الاحداثيات العامة
- معادلات التحويل
- تصنيف الجمل الميكانيكية
- السرع العامة ـ الاندفاعات العامة ـ الطاقة الحركية
- القوى العامة
- معادلات لاغرانج للجمل البسيطة
- معادلات لاغرانج للجمل المعقدة
- معادلات لاغرانج في حالة القوى النبضية



لقد اعتمدنا في دراسة الميكانيك حتى الآن على قوانين نيوتن . سندرس الميكانيك في هذا الفصل والفصل الذي يليه بشكل عام معتمدين على وجهات نظر عامة يرجع الفضل فيها الى العالمين لاغرانج وهاملتون . وبالرغم من ان الطريقة الجديدة تعتمد في صياغتها على قوانين نيوتن الا انها تمتاز عن هذه القوانين بالناحيتين التاليتين :

١ ـ سهولة الصياغة الرياضية والحل للمسائل الميكانيكية .

٢ ـ علاقتها نظرياً وتطبيقياً بمجالات متقدمة اخرى للميكانيك كميكانيك الكم والميكانيك السماوي والميكانيك الاحصائي والميكانيك الكهربائي (الكترودیناميك) .

I ـ الاحداثيات العامة :

لنفرض ان جملة ميكانيكية تتحرك ضمن قيد ما او عدة قيود . ان هناك حداً أدنى من المتحولات المستقلة اللازمة لتعيين موضع الجملة . هذه الاحداثيات او المتحولات المستقلة والتي نرمز لها بالرموز $q_1, q_2, q_3, \dots q_n$ تسمى بالاحداثيات العامة للجملة الميكانيكية . ويمكن أن تكون هذه الاحداثيات مسافات أو زوايا او مقادير اخرى مرتبطة بها . وعدد هذه الاحداثيات n يساوي عدد درجات حرية الجملة الميكانيكية المعتبرة . وهناك بصورة عامة مجموعات مختلفة من الاحداثيات يمكن اعتبارها كاحداثيات عامة ، الا ان لحسن الاختيار أهمية كبرى في تسهيل الجزء الرياضي من صياغة ودراسة معادلات الحركة .

II – معادلات التحويل :

لنعتبر جملة ميكانيكية مؤلفة من n جزيء مادي يتعين كل منها بشعاع الموضع $\vec{r}_i$ او بالاحداثيات الديكارتية z_i ، y_i ، x_i . ترتبط هذه الاحداثيات بالاحداثيات العامة بعلاقات تسمى معادلات التحويل (اي التحويل من مجموعة من الاحداثيات الى مجموعة اخرى هي الاحداثيات العامة) ويمكن كتابة هذه المعادلات بالشكل :

$$\left.\begin{array}{l} x_i = x_i\ (q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots, q_n, t) \\ y_i = y_i\ (q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots, q_n, t) \\ z_i = z_i\ (q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots, q_n, t) \end{array}\right\} \quad (1)$$

حيث t الزمن . وبشكل شعاعي يمكن كتابة (1) على النحو التالي :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\ (q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots, q_n, t) \quad (2)$$

ويفترض ان جميع التوابع في العلاقات (1) و (2) مستمرة ولها مشتقات مستمرة .

III – تصنيف الجمل الميكانيكية :

يمكن تصنيف الجمل الميكانيكية وفق وجهات نظر ثلاث : الزمن والاحداثيات والطاقة .

١ – من وجهة نظر الزمن تصنف الجمل الميكانيكية الى سكليرونومية وريونومية .

آ) اذا لم يظهر الزمن t مباشرة في العلاقات (1) أو (2) فان الجملة تسمى سكليرونومية .

ب) أما اذا ظهر الزمن t مباشرة في العلاقات المذكورة (أي إذا كانت بعض التوابع توابع ظاهرة بالنسبة للزمن t) فان الجملة تسمى ريونومية . ويلاحظ في هذه الحالة ان القيد متحرك .

٢ – أما من وجهة نظر الاحداثيات العامة فتصنف الجملة الى هولونومية ولا هولونومية .

آ) اذا كانت القيود المفروضة على الحركة قابلة للتعبير عنها بعلاقات من الشكل :

$$f(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, t) = 0$$

أو مايعادل ذلك ، يقال عن الجملة عندئذ انها هولونومية .

ب) والا قيل عنها انها لا هولونومية .

٣ – واما من وجهة نظر الطاقة فان الجمل محافظة او غير محافظة .

آ) فاذا كانت جميع القوي المؤثرة في نقاط الجملة مشتقة من كمون قيل عن الجملة انها محافظة وتكون طاقتها ثابتة في جميع اوضاعها .

ب) أما اذا لم تكن القوى كذلك فالجملة غير محافظة وطاقتها غير ثابتة .

وباعتبار وجهات النظر الثلاث يقال عن الجملة انها بسيطة اذا كانت من الانواع (آ) أي سكليرونومية أوهولونومية او محافظة . ويقال عنها انها معقدة اذا كانتمن الانواع (ب) اي ريونومية او لا هولونومية او غير محافظة .

IV – السرع العامة – الاندفاعات العامة – الطاقة الحركية :

نسمي مشتقات الاحداثيات العامة بالنسبة للزمن بالسرع العامة فهي إذن : $q'_1, q'_2, q'_3, \ldots, q'_n$. وتكتب الطاقة الحركية للجملة بالشكل :

$$T = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i \, r_i'^2 = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2 \right) \qquad (3)$$

حيث N عـدد جزيئات الجملة . وعندما نستعمل العلاقات (1) او (2) فان الطاقة الحركية تكتب عندئذ بدلالة السرع العامة q_j ، حيث $(j = 1, \ldots, n)$، والتابع الذي يعين الطاقة الحركية عندئذ يحوي حدوداً متجانسة من الشكل $a_{ij} \cdot q'_i \cdot q'_j$ فيما اذا كانت الجملة بسيطة . أما اذا كانت معقـدة فيحوي بالاضافة الى الحدود المتجانسة حدوداً من الشكل $b_i \cdot q'_i$. وباختصار يمكن القـول ان الطاقة الحركية متجانسة من المرتبـة الثانية من أجل الجمل البسيطة وغير متجانسة بالنسبة للجمل المعقدة .

في حالة الاحداثيات الديكارتية يعطى الاندفاع بالعلاقة :

$$p = mv = \frac{d}{dv}\left(\tfrac{1}{2} mv^2\right) = \frac{dT}{dv} \tag{4}$$

أي ان الاندفاع هو مشتق الطاقة الحركية بالنسبة للسرعة . وتكافىء هذه العلاقة العلاقات الثلاث :

$$\left.\begin{aligned} p_x &= mx' = \frac{\partial}{\partial x'}\left[\tfrac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2)\right] = \frac{\partial T}{\partial x'} \\ p_y &= my' = \frac{\partial}{\partial y'}\left[\tfrac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2)\right] = \frac{\partial T}{\partial y'} \\ p_z &= mz' = \frac{\partial}{\partial z'}\left[\tfrac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2)\right] = \frac{\partial T}{\partial z'} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

بالمقارنة مع حالة الاحداثيات الديكارتية ، نعرّف الاندفاعات العـامة بانها مشتقات الطاقة الحركية بالنسبة للسرع العامة أي :

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i} \quad \text{و} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

وباستعمال العلاقة (3) نجد :

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q'_i} \sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_j \vec{r}_j'^{\,2} = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{r}'_j \cdot \frac{\partial \vec{r}'_j}{\partial q'_i} \tag{7}$$

ملاحظة : اعتباراً من الآن سنختصر اشارة المجموع على الشكل البسيط $\sum$ ونعني بذلك أن j ستأخذ جميع القيم الممكنة ، أي من 1 الى n في مثل الحالة الأخيرة .

V – القوى العامة :

لقد رأينا ان العمل الذي تقوم به القوى $\vec{F_i}$ المطبقة على الجسم أثناء انتقالات عنصرية $\vec{dr_i}$ هو :

$$dW = \sum_i \vec{F_i} \cdot \vec{dr_i} \tag{8}$$

ويكتب هذا العمل بدلالة الاحداثيات العامة بالشكل :

$$dW = \sum_i \vec{F_i} \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} dq_j$$

$$= \sum_j \Big[\sum_i \vec{F_i} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \Big] dq_j \tag{9}$$

ومن جهة ثانية يمكن كتابة التفاضل الكلي للعمل بالشكل :

$$dW = \sum_j \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j \tag{10}$$

وبمقارنة العلاقتين الاخيرتين نجد ان :

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \sum_i \vec{F_i} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \tag{11}$$

ان العلاقة (8) تكتب :

$$dW = \sum_i (F_{x_i} dx_i + F_{y_i} dy_i + F_{z_i} dz_i \tag{12}$$

ومنها :

$$\left.\begin{aligned} F_{x_i} &= \frac{\partial W}{\partial x_i} \\ F_{y_i} &= \frac{\partial W}{\partial y_i} \\ F_{z_i} &= \frac{\partial W}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

وهذا يعني ان القوة المرفقة باحدى الاحداثيات هي مشتق العمل بالنسبة لتلك الاحداثية . وبنفس الطريقة سنعرف القوى العامة بانها مشتقات العمل بالنسبة للاحداثيات العامة . وتعطى هذه القوى العامة اذن بالعلاقة .

$$\Phi_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \sum_j m_j \vec{r}_j'' \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \qquad (14)$$

ونلاحظ ان واحدات القوة العامة ليست بالضرورة واحدات قوة لأن واحدات $\vec{r}_j$ هي واحدات طول في حين ان واحدات $\vec{q}_i$ قد تكون واحدات طول او واحدات زاوية . وبالرغم من ذلك فان العمل يحتفظ بواحدات العمل دائماً . ويمكن أن نرى ذلك من العلاقتين (9) و (14) .

VI – ملاحظة حول عملية الاشتقاق :

لتكن العلاقة التالية التي تعين تابعاً ما A بدلالة الاحداثيات العامة سواء كان التابع سلمياً او شعاعياً .

$$A = A(q_1 , q_2 , q_3 , \dots , q_n , t) \qquad (15)$$

ان المشتق الكلي (بالنسبة للزمن) لهذا التابع يعطى عندئذ بالعلاقة :

$$A' = \frac{\partial A}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial A}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial A'}{\partial q_n} q_n' + \frac{\partial A}{\partial t} \qquad (16)$$

والمشتقات الجزئية لـ A' بالنسبة للسرع العامة هي عندئذ من العلاقة الاخيرة

$$\frac{\partial A'}{\partial q'_i} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \quad , i = 1 , 2 , \ldots , n \qquad (17)$$

مما يدل على امكانية حذف « الفتحات » اذا وجـدت في كل من الصورة والمخرج وهذه الخاصة عامة وتطبق بالتالي على اشعة الموضع $\vec{r_j}$. إذن :

$$\frac{\partial \vec{r}'_j}{\partial q'_i} = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \qquad (18)$$

وهذه العلاقة هامة جداً في هذا البحث .

وبالاضافة الى ذلك ،فمن المعروف انه اذا كان التابع A قابلاً للاشتقاق من المرتبة الثانية وجميع مشتقاته الجزئية من المرتبة الثانيـة مستمرة فان من الممكن عندئذ تبادل ترتيب المشتقات الجزئية . أي بعبارة رياضية مختصرة :

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_k} A = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_i} A \qquad (19)$$

وكذلك :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_i} A = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d}{dt} A = \frac{\partial A'}{\partial q_i} \qquad (20)$$

وينطبق ذلك على $\vec{r_j}$ لأنها بالفرض محققة لشروط الاشتقاق السابقة . إذن

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_k} \vec{r}_i = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_i} \vec{r}_i \qquad (21)$$

وكذلك :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_i} \vec{r}_j = \frac{\partial \vec{r}'_j}{\partial q_i} \qquad (22)$$

ولهاتين العلاقتين ايضاً اهمية في بحثنا هذا .

VII — معادلات لاغرانج للجمل البسيطة :

ان الطاقة الحركية هي نقطة الانطلاق في اشتقاق معـادلات لاغرانج

بصورة عـامة . وفي حالة الجمل البسيطة يكون من السهل حساب بعض المتحولات بدلالة الأخرى من علاقة القيد . اي انه يمكن حذف الاحداثيات اللا مستقلة والابقاء على الاحداثيات المستقلة فقط . ولذلك سنفرض في هذه الحالة اننا اخترنا الاحداثيات العامة المستقلة q_i حيث $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ، وجدنا ان الطاقة الحركية تعطي بالعلاقة :

$$T = \sum_j \tfrac{1}{2} m_j \, r_j'^{\,2} = \sum_j \tfrac{1}{2} m_j (\vec{r}_j')^2 \tag{23}$$

ان مشتقات الطاقة الحركية بالنسبة للاحداثيات العامة عندئذ هي :

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_j m_j \, \vec{r}_j' \cdot \frac{\partial \vec{r}_j'}{\partial q_i} \tag{24}$$

ومشتقاتها بالنسبة للسرع العامة هي :

$$\frac{\partial T}{\partial q_i'} = \sum_j m_j \, \vec{r}_j' \cdot \frac{\partial \vec{r}_j'}{\partial q_i'} = \sum_j m_j \, \vec{r}_j' \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \tag{25}$$

وذلك باستعمال خاصة الاشتقاق التي تعبر عنهـا العلاقة (18) والتي تختصر الفتحات بموجبها في كل من صورة ومخرج المشتق الجزئي .

لنشتق الآن طرفي العلاقة الأخيرة اشتقاقاً تاماً بالنسبة للزمن . ونجد :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) = \sum_j m_j \, \vec{r}_j'' \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} + \sum_j m_j \, \vec{r}_j' \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$$

$$= \sum_j m_j \, \vec{r}_j'' \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} + \sum_j m_j \, \vec{r}_j' \cdot \frac{\partial \vec{r}_j'}{\partial q_i} \tag{26}$$

وذلك باستعمال خاصة الاشتقاق المعبر عنها بالعلاقة (22) . باستعمال العلاقتين (14) و (24) في العلاقة الأخيرة (26) نجد :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \Phi_i \, , \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{27}$$

وهي الشكل العام لمادلة لاغرانج بدلالة الطاقة الحركية .

عندما تكون الجملة محافظة أي عندما تشتق جميع القوى من كمون ، يكون الكمون تابعاً للاحداثيات العامة فقط دون السرع العامة أي :

$$V = V (q_1 , q_2 , \dots q_n) \qquad (28)$$

وبالتالي لدينا العلاقات

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = - \Phi_i \quad , \quad i = 1 , 2 , \dots , n \qquad (29)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_i'} = 0 \quad , \quad i = 1 , 2 , \dots , n \qquad (30)$$

اذا عوضنا في المعادلة (27) عن Φ_i بـ $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ ونقلناها الى الطرف الاول ، ثم طرحنا المقدار $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ (الذي يساوي الصفر) من $\frac{\partial T}{\partial q_i'}$ في الطرف الاول للمعادلة المذكورة فان المعادلة لاتتغير وبالتالي تصبح بالشكل :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i'} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} = 0 \qquad (31)$$

أو :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i'} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , i = 1 , 2 , 3 , \dots , n \qquad (32)$$

وهي الشكل الجديد لمعادلة لاغرانج من اجل الجمل البسيطة المحافظة ويسمى التابع

$$L = T - V \qquad (33)$$

بتابع لاغرانج . وتمثل المعادلة (32) n معادلة تفاضلية هي معادلات الحركة للجملة الميكانيكية المدروسة .

VIII – معادلات لاغرانج للجمل الميكانيكية المعقدة :

اذا تأملنا صفات الجملة الميكانيكية المعقدة (راجع الفقرة III) فاننا

نرى أن تعقيدها ناشىء عن صفة اللاهولونومية التي تتمتع بها والتي تدل على ان تابع او توابع القيد المفروضة على الجملة هي بحيث لا يمكن منها عزل جميع المتحولات (الاحداثيات) اللامستقلة لأن توابع القيد لايمكن أن تكتب بالشكل الجبري

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0$$

ومعادلات القيود هي بصورة عامة تفاضلية ، أي انها تابعة للسرع العامة . ويمكن كتابتها بالشكل :

$$A_1(q_k)q_1' + A_2(q_k)q_2' + \cdots + A_n(q_k)q_n' + A(q_k) = 0$$

$$B_1(q_k)q_1' + B_2(q_k)q_2' + \cdots + B_n(q_k)q_n' + B(q_k) = 0$$

....

$$R_1(q_k)q_1' + R_2(q_k)q_2' + \cdots + R_n(q_k)q_n' + R(q_k) = 0$$

وعدد هذه المعادلات هو عدد القيود اللاهولونومية المفروضة على الجملة .

وفي هذه المعادلات جميع الامثال

$$A_i(q_k), B_i(q_k), \ldots, R_i(q_k), A, B, \ldots, R$$

تابعة بصورة عامة لجميع الاحداثيات العامة $q_1, q_2, \ldots, q_n$. ويمكن كتابة علاقات القيود بالأشكال المختصرة :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_i A_i(q_k)\, q_i' + A(q_k) = 0 \\ &\sum_i B_i(q_k)\, q_i' + B(q_k) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sum_i R_i(q_k)\, q_i' + R(q_k) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

ونكرر القول مرة ثانية ان عدد هذه العلاقات ، وليكن m ، هو نفس عدد القيود المفروضة على الجملة . إذن هناك m علاقة تربط بين n متحول هي الاحداثيات العامة q_i . وهذا يعني ان هناك m من الاحداثيات العامة

غير مستقلة وبالتالي $n-m$ منها تعد متحولات مستقلة . وقبـل اشتقـاق معادلات لاغرانج لمثل هذه الجمل المقـدة تجب الاشارة الى ان معادلات القيود (34) تشكل جزءاً من معادلات الحركه ، والجزء الثاني هو معادلات لاغرانج التي سنشتقها الآن .

اذا عدنا الى العلاقة (26) أمكن كتابتها على الشكل :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \sum_i m_j \vec{r}'_j \cdot \frac{\partial \vec{r}'_j}{\partial q_i} = \sum_i m_j \vec{r}''_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$$

أو :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_i m_j \vec{r}''_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \qquad (35)$$

وهذه العلاقة عامة وتنطبق على الجمل البسيطة والمعقدة على حد سواء .

لتكن $\vec{F}_j$ القوى المطبقة على الجملة و Φ_i القوى العامة . ولتكن كذلك δr_j انتقالات افتراضية في الاحداثيات الديكارتية و δq_i الانتقالات الافتراضية الموافقة في الاحداثيات العامة . عندئذ يمكن كتابة العمل الافتراضي δW بطريقتين :

$$\delta W = \sum_i \Phi_i \, \delta q_i \qquad (36)$$

$$\delta W = \sum_j \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \sum_j m_j \vec{r}''_j \cdot \sum_i \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$= \sum_i \Big[\sum_j m_j \vec{r}''_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \Big] \delta q_i$$

$$= \sum_i \Big[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \Big] \delta q_i \qquad (37)$$

حيث استعملنا المعادلة (35) والعلاقة

$$\delta \vec{r}_j = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i \qquad (38)$$

وبمقارنة العلاقتين (36) و (37) نجد

$$\sum_i \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \Phi_i \right] \delta q_i = 0 \qquad (39)$$

لو كانت جميع الاحداثيات q_i مستقلة لكانت الانتقالات الافتراضية δq_i مستقلة عن بعضها أيضاً ولأمكن عندئذ أن نقول ان العلاقة (39) تتحقق دوماً إذا كانت أمثال δq_i معدومة، وعندئذ نحصل على معادلات لاغرانج لحالة الجمل البسيطة (حيث هناك δq_i مستقلة جميعها بالفعل). أما في حالتنا الحاضرة (للجملة المعقدة) فالاحداثيات q_i ليست كلها مستقلة عن بعضها وبالتالي فان الانتقالات الافتراضية δq_i ليست جميعها مستقلة. ولذلك لايمكننا أن نقول ان جميع أمثالها معدومة.

ان العلاقات التي تربط بين الانتقالات الافتراضية تنتج من علاقات القيود (34). ويمكن كتابة هذه العلاقات بشكل تفاضلي :

$$\left.\begin{array}{l} \sum_i A_i(q_k)\,dq_i + A(q_k)\,dt = 0 \\ \sum_i B_i(q_k)\,dq_i + B(q_k)\,dt = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_i R_i(q_k)\,dq_i + R(q_k)\,dt = 0 \end{array}\right\} \qquad (40)$$

وإذا اعتبرنا هذه العلاقات (أي هذه القيود) في لحظة معينة أمكن اعتبار الزمن ثابتاً عندئذ وبالتالي $dt = o$. وبالاضافة الى ذلك ، اذا اعتبرنا

العناصر التفاضلية في العلاقات كانتقالات افتراضية امكن استبدال $d q_i$ بـ δq_i وعندئذ تأخذ العلاقات المذكورة الشكل الافتراضي الآتي :

$$\left.\begin{array}{l} \sum_i A_i(q_k)\,\delta q_i = 0 \\ \sum_i B_i(q_k)\,\delta q_i = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_i R_i(q_k)\,\delta q_i = 0 \end{array}\right\} \quad (41)$$

لنضرب هذه العلاقات بالترتيب بالتوابع $\lambda_1(q_k)$ و $\lambda_2(q_k)$ و ... و $\lambda_m(q_k)$ ولنجمع الناتج طرفاً إلى طرف . نحصل على العلاقة

$$\sum_i \Big[\lambda_1(q_k) A_i(q_k) + \lambda_2(q_k) B_i(q_k) + \cdots + \lambda_m(q_k) R_i(q_k) \Big] \delta q_i = 0 \quad (42)$$

وتسمى التوابع $\lambda_i(q_k)$ ، حيث $i = 1, 2, \ldots, m$ ، بمضاريب لاغرانج وهي توابع للاحداثيات العامة جميعها ويجب تعيينها فيما بعد .

إذا طرحنا العلاقة (42) من العلاقة (39) نجد

$$\sum_i \Big[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \Phi_i - \lambda_1 A_i - \lambda_2 B_i - \cdots - \lambda_m R_i \Big] \delta q_i = 0 \quad (43)$$

حيث اسقطنا المتحولات q_k من التوابع للتبسيط فقط وحيث $i = 1, 2, \ldots, n$.

قلنا سابقاً ان الانتقالات الافتراضية δq_i ليست جميعها مستقلة عن بعضها بل هناك m انتقالاً غير مستقل ويبقى $(n - m)$ انتقال مستقل . لتكن δq_1 ، δq_2 ،... ، δq_m هي الانتقالات الافتراضية غير المستقلة وعندئذ تكون الانتقالات المستقلة هي δq_{m+1} ، δq_{m+2} ، ... ، δq_n . لنختر توابع لاغرانج λ_1 و λ_2 و ... و λ_m بحيث تنعدم امثال الانتقالات

غير المستقلة في المعادلة (43) وعند ذلك يكون

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \Phi_i - \lambda_1 A_i - \lambda_2 B_i - \dots - \lambda_m R_i = 0 \qquad (44)$$

حيث $i = 1, 2, \dots, m$. وإذا أسقطنا الحدود المعدومة من المعادلة (43) تصبح :

$$\sum_i \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \Phi_i - \lambda_1 A_i - \lambda_2 B_i - \dots - \lambda_m R_i\right]\delta q_i = 0 \quad (45)$$

حيث : المجموع على i من $i = m + 1$ الى n .

تمثل هذه العلاقة ($n - m$) معادلة فيها ($n - m$) متحول مستقل هي δq_i حيث ($i = m + 1, m + 2, \dots, n$) ويجب ان تتحقق دائماً ومهما كانت هذه المتحولات المستقلة . لذلك يجب أن تكون جميع أمثال المتحولات المستقلة معدومة . إذن :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \Phi_i - \lambda_1 A_i - \lambda_2 B_i - \dots - \lambda_m R_i = 0 \qquad (46)$$

حيث $i = m + 1, m + 2, \dots, n$

واخيراً إذا تأملنا العلاقتين (44) و (46) أمكننا أن ندمجها بعلاقة واحدة هي :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \Phi_i - \lambda_1 A_i - \lambda_2 B_i - \dots - \lambda_m R_i = 0 \qquad (47)$$

حيث $i = 1, 2, \dots, n$

هذه هي معادلات لاغرانج من أجل الجمل الميكانيكية المقدة . تمثل هذه العلاقة n معادلة بـ $n + m$ مجهول هي $q_1, q_2, \dots, q_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ فاذا أضفنا اليها معادلات القيود وهي m معادلة يصبح مجموع المعادلات $n + m$ وعدد المجاهيل $n + m$ ايضاً . وحل المجموعة الناتجة يؤدي إلى معرفة الاحداثيات العامة q_i ومضاريب لاغرانج . فهذه المجموعة هي اذن معادلات الحركة ، ونعيد كتابتها بغية الوضوح والتلخيص .

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{d\,t}\frac{\partial T}{\partial q_i'}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\Phi_i+\lambda_1 A_i+\lambda_2 B_i+\dots+\lambda_m R_i\\&\sum_i A_i\,q_i'+A=0\\&\sum_i B_i\,q_i'+B=0\\&\dots\dots\dots\dots\\&\sum_i R_i\,q_i'+R=0\end{aligned}\right\}\qquad(48)$$

واخيراً إذا كانت الجملة محافظة ، أو كانت القوى مشتقة من كمون ، فان بامكاننا أن نتبع طريقة مماثلة للتي اتبعناها من أجل الجمل البسيطة في الفقرة السابقة وان نكتب معادلات لاغرانج (47) بدلالة تابع لاغرانج L . وبالتالي تأخذ معادلات لاغرانج الشكل الذي تمثله المعادلة الأولى من المجموعة التالية :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial q_i'}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\lambda_1 A_i+\lambda_2 B_i+\dots+\lambda_m R_i\\&\sum_i A_i\,q_i'+A=0\\&\sum_i B_i\,q_i'+B=0\\&\dots\dots\dots\dots\\&\sum_i R_i\,q_i'+R=0\end{aligned}\right\}\qquad(49)$$

وهي معادلات الحركة لجملة ميكانيكية معقدة (لاهولونومية) محافظة .

IX ـ معادلات لاغرانج في حالة قوى نبضية :

لقد وجدنا فيما سبق من هذا الفصل معادلات لاغرانج عندما تكون القوى المؤثرة على الجملة مرافقة لها أثناء الحركة كلها . إلا ان هناك حالات

تطبق فيها القوة على الجملة خلال فترة زمنية قصيرة جداً . مثال ذلك حالة جسم ساكن يعطى دفعة باليد . فالقوى التي تبديها اليد الدافعة تطبق على الجسم فترة صغيرة فقط . ومثل هذه القوى تسمى بالقوى النبضية او النابضة . وهذه القوى تؤثر على الجملة الميكانيكية المطبقة عليها فتكسبها تسارعاً وبالتالي وعندما ينتهي تأثيرها تكون الجملة قد اتخذت وضعا حركياً معيناً . ويمكنها بعد ذلك أن تتابع الحركة وربما تحت تأثير قوى اخرى غير نبضية . وبعبارة اخرى ان القوى النبضية تعطي للجملة سرعة ابتدائية إذا كانت ساكنة قبل تطبيقها او تغير وضعها الحركي تغييراً مفاجئاً خلال فترة زمنية قصيرة جداً .

أثناء تطبيق القوى النبضية تكون الجملة خاضعة لهذه القوى بالفعل ولذلك يمكن أن نعبر عن معادلات الحركة أثناء هذه الفترة القصيرة بمعادلات لاغرانج بصورة عامة . أي

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \Phi_i = \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \qquad (50)$$

فاذا كانت فترة تطبيق القوى النبضية $\vec{F}_j$ هي τ (بين اللحظتين $t = 0$ و $t = \tau$) وأردنا أن نحصل على كل تأثير القوى خلال هذه الفترة فان من الواجب عندئذ ان نكامل العلاقة (50) بين $0 , \tau$. اذن

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} dt - \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q} dt = \int_0^\tau \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} dt \quad (51)$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right]_{t=\tau} - \left[\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right]_{t=0} - \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_i} dt = \sum_j \int_0^\tau \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} dt \quad (52)$$

فاذا كان τ قصيراً جداً أمكن اعتبار $\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$ ثابتاً خلال هذه الفترة وبالتالي فان تكامل الطرف الأيمن للعلاقة الأخيرة يكتب :

$$\int_0^\tau \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \, dt = \sum_i \left(\int_0^\tau \vec{F}_j \, dt \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \sum_i \vec{\mathcal{J}}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \quad (53)$$

حيث $\vec{\mathcal{J}}_j$ هو دفع القوة $\vec{F}_j$ ..

إذا كانت الفترة τ قصيرة جداً اي انتهت الى الصفر فان :

$$\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_i} \, dt = 0 \quad (54)$$

لأن $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ محدود ، وذلك حسب نظرية بهذا المعنى في الرياضيات التحليلية .
فاذا أخذنا نهاية طرفي العلاقة (52) آخذين بعين الاعتبار العلاقتين (53) و (54) فاننا نجد :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial q'_i} \right]_2 - \left[\frac{\partial T}{\partial q'_i} \right]_1 = \sum_j \vec{\mathcal{J}}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \mathcal{F}_i \quad (55)$$

حيث يدل الدليل 1 على الحالة قبل تطبيق القوة النبضية والدليل 2 على الحالة بعد انتهاء تأثير تلك القوة ، وحيث $\mathcal{F}_i$ هي بالتعريف الدفوع العامة المرافقة للاحداثيات العامة .

واخيراً لما كانت الاندفاعات العامة p_i تعطى بالعلاقة (6) فان المعادلة (55) تأخذ الشكل

$$(p_i)_2 - (p_i)_1 = \sum_j \vec{\mathcal{J}}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \mathcal{F}_i \quad (56)$$

وتعرف كل من العلاقتين المتكافئتين (55) و (56) بمعادلات لاغرانج في حالة القوى النبضية . وتعطينا هذه المعادلات مقدار التغيرات في الاندفاعات العامة p_i الناتجة عن تطبيق القوى النبضية . فاذا كنا نعلم الاندفاعات الابتدائية $(p_i)_1$ أمكننا معرفة $(p_i)_2$ بعد انتهاء تأثير هذه القوى . وبعبارة اخري ، ان هذه المعادلات تعطينا الوضع الحركي للجملة اذا كنا نعلم الوضع الحركي قبل تطبيق القوى النبضية . واعتباراً من هذا الوضع الجديد للحركة تتابع الجملة حركتها بتأثير قوى اخرى (إذا وجدت) خاضعة لمعادلات حركة اخرى غير المعادلات (56) ،وذلك وفق قانون نيوتن الثاني في التحريك .



الفصل الثالث عشر

ميكانيك هاميلتون

— تابع هاميلتون
— معادلات هاميلتون
— تابع هاميلتون للجمل المحافظة
— الاحداثيات المتنكرة
— المعادلات القانونية للحركة في حقل قوى مركزي
— الفراغ الطوري والاحداثيات الطورية
— نظريـــة ليوفيل
— الحساب التغيري
— مبدأ هاميلتون والفعل الاصغر
— التحويلات القانونيـــة
— النوابع المولدة وشرط التحويلات القانونية
— معادلات هاميلتون وجاكوبي
— معترضات بواسون
— معادلات الحركة بدلالة معترضات بواسون
— خواص معترضات بواسون
— التابعان المترافقان والتابعان المتبادلان



لقد عالجنا في الفصل السابق مسائل الميكانيك بطريقة مبنية على نظرية لاغرانج . وفي الفصل الحـالي سنعالج تلك المسائل بطريقـة اخرى أعم واوسع من سابقتها (طريقة لاغرانج) إلا أنها ذات صلة وثيقة بها . وتعرف هذه الطريقة بنظرية هاميلتون . وبالرغم من أن هذه النظرية تستخدم لحل المسائل الميكانيكية التقليدية فانها تقدم أسساً أكثر فائدة في مجالات أخرى كالفـيزياء النووية والذرية وميكانيك الكم والميكانيك السماوي والميكانيك الاحصائي .

I — تابع هاميلتون :

لقد كان تابع لاغرانج اساسياً جداً في نظرية لاغرانج لصياغة معادلات الحركة بشكل رياضي بسيط . أما في نظرية هاميلتون فان هناك تابعاً ندعوه تابـع هاميلتون (أو الهاميلتوني) لا يقل في أهميته عن تابع لاغرانج . ويعرف هذا التابع بالنسبة لمجموعة ميكانيكية بالعلاقة :

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \, q_i' - L \qquad (1)$$

حيث L تابع لاغرانج لهذه الجملة ، و q_i احداثياتها المعممة و q_i' سرعها المعممة و p_i اندفاعاتها المعممة . ونظراً لارتباط L و q_i' بـ q_i فليس من الصعب عندئذ أن نرى امكانية التعبير عن H بدلالة q_i و p_i وكذلك الزمن t . ونستطيع لذلك أن نكتب :

$$H = H(p_i , q_i , t) \qquad (2)$$

حيث $i = 1 , 2 , \dots , n$ وحيث n عدد درجات حرية المجموعة الميكانيكية أي عدد احداثياتها العامة الكافية لتعين وضعها .

II — معادلات هاميلتون :

ان التفاضل الكلي لتابع هاملتون محسوباً من العلاقة (1) هو

$$dH = \sum_i p_i \, dq_i' + \sum_i q_i' \, dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i'} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3)$$

ذاك لأن L تابع لـ t بصورة عامة . كما أن لدينا

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i'} \quad (4)$$

ونجد منها (راجع ميكانيك لاغرانج) :

$$p_i' = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i'} = \frac{\partial L'}{\partial q_i'} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (5)$$

باستعمال العلاقتين (4) و (5) في العلاقة (3) تصبح الأخيرة

$$dH = \sum_i q_i' \, dp_i - \sum_i p_i' \, dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (6)$$

ومن جهة أخرى فاننا نستطيع أن نحصل على التفاضل الكلي لتابع هاميلتون من العلاقة (2) فنجد :

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (7)$$

وبمقارنة العلاقتين الأخيرتين (6) و (7) نجد :

$$\left.\begin{aligned} q_i' &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ p_i' &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

وتسمى هذه المعادلات بمعادلات هاميلتون ، أو المعادلات القانونية للحركة . وتبين هذه العلاقات أن الاحداثيات المعممة q_i والاندفاعات المعممة p_i تلعب دورين متشابهين في الصياغة العامة لمبادىء الميكانيك .

III — تابع هاميلتون للجمل المحافظة :

يمكن في الحالة العامة أن يكون تابع هاميلتون تابعاً ظاهراً بالنسبة للزمن t ، أي أن الزمن يظهر مباشرة في عبارة التابع الهاميلتوني . وفي حالات خاصة كثيرة يكون الهاميلتوني تابعاً مستتراً بالنسبة للزمن . ونستطيع عندئذ أن نبين أن تابع هاميلتون ثابت ويساوي الطاقـة الكلية للجملة . ونكون في الوقت نفسه قد بينا أن الطاقة الكلية ثابتة أي أن الجملة محافظة . لهذا الغرض نعود إلى العلاقة (6) ونكتبها من جديد على الشكل التالي :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i q_i' \; p_i' - \sum_i p_i' \; q_i' - \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \qquad (9)$$

ثم باستعمال العلاقة الأخيرة من (8) نكتب

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (10)$$

وتعني هذه العلاقة (10) أن تبعية H للزمن هي فقط في ظهور t مباشرة في تابع لاغرانج L وبالتالي في تابع هاميلتون H ، وذلك لأن المشتق الكلي لـ H بالنسبة للزمن يساوي المشتق الجزئي لـ H بالنسبة للزمن أيضاً .

اذا فرضنا الآن أن تابع لاغرانج L وبالتالي تابع هاميلتون H للجملة تابعان مستتران بالنسبة للزمن كان

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \text{وبالتالي} \quad \frac{dH}{dt} = 0 \qquad (11)$$

أي أن تابع هاميلتون H ثابت تماماً . اذن :

$$H = H_0 \quad \text{ثابت} \qquad (12)$$

ولكي نبين أن هـذا الثابت هو الطـاقة الكلية للجملة نعود أولاً الى العلاقة (1) التي تعرف التابع الهاميلتوني فنكتب

$$H = \sum p_i q_i' - L = \sum p_i q_i' - T + V \qquad (13)$$

لكن $p_i = \partial T/\partial q_i'$ حسبما رأينا سابقاً . وفي الجمل البسيطة (الهولونومية) تكون الطـاقة الحركية T متجانسة من الدرجـة الثانية بالنسبة للسرع المعممة q_i' .

لنقف قليلاً هنا بغية تذكر بعض خواص التوابع المتجانسة . من خواص التوابع $F(x, y, z, \ldots)$ المتجانسة من الدرجة n أنها تحقق الخـاصة الرئيسية :

$$a^n F(x, y, z, \ldots) = F(ax, ay, az, \ldots) \qquad (14)$$

مهما كانت a . وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة لـ a نجد

$$na^{n-1} F = \frac{\partial F}{\partial(ax)}\frac{d(ax)}{da} + \frac{\partial F}{\partial(ay)}\frac{d(ay)}{da} + \frac{\partial F}{\partial(az)}\frac{d(az)}{da} + \ldots$$

$$= x\frac{\partial F}{\partial(ax)} + y\frac{\partial F}{\partial(ay)} + z\frac{\partial F}{\partial(az)} + \ldots$$

وبجعل $a = 1$ نجد

$$nF = x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} + \ldots \qquad (15)$$

لنعد الآن إلى الطاقة الحركية للجملة البسيطة ، وهو كما سلف تابع متجانس من الدرجة الثانية بالنسبة لـ q_i' ، ولنطبق عليه الخاصة الأخيرة الممثلة بالمعادلة (15) فنجد :

$$2T = q_1' \frac{\partial T}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial T}{\partial q_2'} + \ldots + q_n' \frac{\partial T}{\partial q_n'}$$

$$= \sum_i q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} = \sum_i q_i' \, p_i \qquad (16)$$

إن استعمال العلاقة (16) في العلاقة (13) يعطي

$$H = 2T - T + V = T + V = E \qquad (17)$$

وهكذا نكون قد برهنا على أنه اذا كان L (وبالتالي H) تابعاً مستتراً بالنسبة للزمن فان H ثابت ويساوي الطاقة الكلية ، اي أن هـذه الطاقة ثابتة بدورها . وهذا يدل على أن الجملة محافظة . ونستطيع هنا أن نعتبر هذه الخاصة تعريفاً جديداً للجملة المحـافظة فنقول : ان الجملة المحافظة هي التي يكون تابعها الهاميلتوني H مستتراً بالنسبة للزمن t ، اي التي تحقق الشرط $\partial L/\partial t = 0$ او $\partial H/\partial t = 0$. ثم إن ماتقدم هنا في هـذه الفقرة ذو فائدة كبرى في التعبير عن الهاميلتوني وبالتالي عن المعادلات القانونية للحركة ، كما سنرى .

IV — الاحداثيات المتنكرة :

يقال عن الاحداثي q_j انه احداثي متنكر (أو مستتر) إذا لم يظهر مبـاشرة في تابع لاغرانج وبالتـالي في تابع هاميلتون ، اي إذا حقق الشرط التالي :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \qquad (18)$$

ويكون عندئذ

$$p_i = (p_i)_0 \quad \text{ثابت} \qquad (19)$$

وهذا يدل على أن الاندفاعات المرافقة للاحداثيات المتنكرة هي تكاملات للحركة او ثوابت الحركة . والعلاقة (19) تمثل إحدى معادلات الحركة .

٧ — المعادلات القانونية للحركة في حقل قوى مركزي :

جسيم مادي كتلته m يتحرك خاضعاً لحقل قوى مركزي $\vec{F}$ كمونه V .
والمطلوب هو حساب تابع هاميلتون لهذا الجسيم ، ثم استخراج المعادلات القانونية لحركته (معادلات هاميلتون) .

بما أن الحركة خاضعة لقوة مركزية فان المسار مستو . ويتعين هذا المستوي بشعاعي السرعة الابتدائية والقوة . ويتعين وضع الجسيم في هذا المستوي باحداثييه القطبيين (r, Θ) ، أي $q_1 = r$ و $q_2 = \Theta$ والاندفاعان المرافقان لهذين الاحداثيين هما $p_1 = p_r$ و $p_2 = p_\Theta$.

تعطى الطاقة الحركية في الاحداثيات القطبية بـ :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (r'^2 + r^2 \Theta'^2) \tag{20}$$

ويكون تابع لاغرانج عندئذ

$$L = \frac{1}{2} m(r'^2 + r^2\Theta'^2) - V(r) \tag{21}$$

ويكون الاندفاعان المعممان :

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial r'} = \frac{\partial L}{\partial r'} = m r' \tag{22}$$

$$p_\Theta = \frac{\partial T}{\partial \Theta'} = \frac{\partial L}{\partial \Theta'} = m r^2 \Theta' \tag{23}$$

بحيث ان العلاقتين الأخيرتين تعطيان :

$$r' = p_r / m \quad \text{و} \quad \Theta' = p_\Theta / mr^2 \tag{24}$$

ويكون تابع هاميلتون عندئذ :

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i' - L$$
$$= p_r r' + p_\Theta \Theta' - \frac{1}{2} m(r'^2 + r^2\Theta'^2) + V(r)$$

$$= p_r \left(\frac{p_r}{m} \right) + p_\Theta \left(\frac{p_\Theta}{mr^2} \right) - \frac{1}{2} m \left(\frac{p_r}{m} \right)^2$$

$$- \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{p_\Theta}{mr^2} \right)^2 + V(r)$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\Theta^2}{2m r^2} + V(r) \tag{25}$$

حيث استعملنا العلاقتين (24) .

أما المعادلات القانونية للحركة فتنتج من تطبيق المعادلات (8) أي :

$$\left. \begin{aligned} r' &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \Theta' &= \frac{\partial H}{\partial p_\Theta} = \frac{p_\Theta}{mr^2} \\ p_r' &= - \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\Theta}{m r^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial r} \\ p_\Theta' &= - \frac{\partial H}{\partial \Theta} = 0 \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

لاحظ أن المعادلتين الأوليين من (26) تكافئان المعادلتين (24) .

VI — الاحداثيات الطورية والفراغ الطوري :

ان الصياغة الهاميلتونية للميكانيك تقدم تشابهاً صريحاً بين الاحداثيات المعممة q_i والاندفاعات المعممة p_j . نسمي الأولى منها (q_i) بالاحداثيات الموضعية ، كما نسمي الثانية (p_i) بالاحداثيات الاندفاعية . ومن المفيد في كثير من الأحيان أن نتصور فراغاً ذا (2n) بعداً تمثله هاتان المجموعتان من الاحداثيات الموضعية والاندفاعية ، إذ تتميز عندئذ كل نقطة من هذا الفراغ باحداثياتها

$$q_1 , q_2 , q_3 , \ldots , q_n , p_1 , p_2 , p_3 , \ldots , p_n$$

يسمى هذا الفراغ بالفراغ الطوري ذي الأبعاد (2n) ، كما نسميه احياناً بالفراغ الطوري (qp) . كما نسمي هـذه المجموعـة من الاحداثيات بالاحداثيات الطورية . والجدير بالذكر والملاحظة هو أن تعيين الوضع الحركي للجملة الميكانكية المدروسة في لحظة ما t (أي تعيين احداثياتها الموضعية والاندفاعية) يؤدي الى معرفة احداثيات نقطة مقابلة من الفراغ الطوري . وبالعكس ، فان كل نقطة من الفراغ الطوري تعين الوضع الحركي للجملة الميكانيكية في لحظة ما t . فعندما تتحرك الجملة الميكانيكية في الفراغ العادي (الديكارتي) ذي الأبعـاد الثلاثة فان النقطة الطورية الممثلة لوضع الجملة تتحرك في الفراغ الطوري وترسم "منحنياً" معطى بمعادلات هاميلتون (المعادلات القانونية للحركة) التي استخرجناها في مطلع هذا الفصل .

VII — **نظرية ليوفيل :**

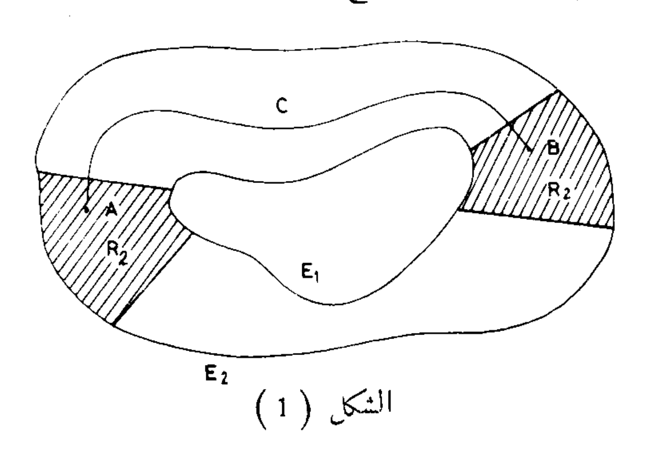
نعتبر مجموعة كبيرة جداً من جمل ميكانيكية محافظة تتصف بأن لها تابعاً هاميلتونياً واحداً . فتابع هاميلتون هذا ثابت لأن جميع الجمل محافظة ويساوي الطاقة الكلية ، أي

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = E \qquad (27)$$

ولا يظهر الزمن في هذه العبارة لأن الهاميلتوني في الجمل المحافظة هو تابع مستتر بالنسبة للزمن . إن المعادلة (27) وأمثالها تمثل سطوحاً في الفراغ الطوري . لنفرض الآن أن الطاقات الكلية الثابتة لهذه الجمل كلها محصورة بين E_1 و E_2 . وعندئذ فان انتقال الجمل من أوضاع الى أخرى يمثل انتقال النقاط الممثلة لها في الفراغ الطوري بين "سطحين" تمثلها المعادلتان

$$\left.\begin{array}{l} H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = E_1 \\ H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = E_2 \end{array}\right\} \qquad (28)$$

وذلك كما يبين الشكل الرمزي (1) . ويجب ألا يغيب عن الذهن أن مفهوم السطح في الفراغ الذي أبعاده أكثر من ثلاثة يختلف عن مفهوم السطح الهندسي المعروف في الفراغ ثلاثي الأبعاد .



الشكل (1)

بما أن للجمل الميكانيكية المتحركة شروط بدء مختلفة في الفراغ الطوري فانها تتحرك وفق « ممرات » مختلفة في ذلك الفراغ . لنتصور أن الأوضاع الابتدائية واقعة في المنطقة R_1 من الفراغ الطوري (أي أن النقاط الطورية الممثلة للأوضاع الابتدائية للجمل واقعة في المنطقة R_1) وأن أوضاعها الجديدة بعد مضي فترة زمنية t واقعة في المنطقة R_2 من الفراغ الطوري . فكل نقطة من النقاط الممثلة للجمل ، مثل النقطة A تتحرك راسمة مساراً « ممراً » في الفراغ الطوري مثل C منتقلة إلى B من المنطقة R_2، حيث A وضع هذه النقطة في لحظة البدء t_1 و B وضعها في اللحظة $t_2=t_1+t$. ونختار R_1 و R_2 بحيث يحتويان على جميع النقاط الممثلة لجميع الجمل في اللحظة t_1 واللحظة t_2 بالترتيب . وهذا يدل على ان عدد النقاط الممثلة للجمل واحد في كل من المنطقتين .

تنص نظرية ليوفيل على أن « الحجمين» R_1 و R_2 متساويان . ويكافيء

ذلك قولنا إن كثافة النقاط الممثلة (عدد النقاط في واحدة الحجم) واحدة في R_1 و R_2 . ونستطيع أن نعمم نص هذه النظرية بقولنا :

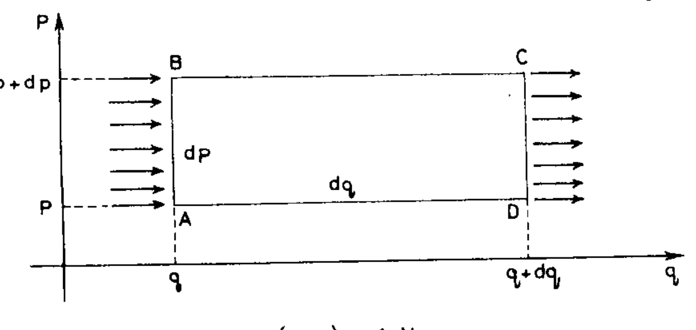
« ان كثافة النقاط الممثلة للجمل في الفراغ الطوري تبقى ثابتة اثناء حركة هذه الجمل في الفراغ العادي » .

قبل أن نأتي على برهان هذه النظرية بصورة عامة سنمهد اولاً بالبرهان عليها في حالة بسيطة حين تكون لكل جملة من هذه الجمل درجة حرية واحدة ، ونستنتج بعد ذلك البرهان العام .

آ ـ حالة درجة حرية واحدة :

في هذه الحالة ، تتميز كل جملة باحداثي q واندفاع p ويتميز الفراغ الطوري عندئذ ببعدين فقط هما q و p . والعنصر « الحجمي » الطوري dR يؤول عندئذ إلى سطح قدره dq dp كما يبين الشكل (2) .

لتكن ϱ (t و p و q) كثافة النقاط الطورية الممثلة في الوضع (p و q) واللحظة t



الشكل (2)

ان السرعة التي تدخل بها النقاط الممثلة من الوجه AB هي $q' = \frac{dq}{dt}$

ويكون عدد النقاط التي تجتاز AB خلال الفترة الزمنية dt

$$N_{AB} = \varrho\, q'\, d p \tag{29}$$

وعدد النقاط التي تخرج مجتازة CD

$$N_{CD} = \left\{ (\varrho q') + \frac{\partial}{\partial q}(\varrho q')\, d q \right\} dp \tag{30}$$

حيث استعملنا دستور التزايدات المحدودة كتقريب مقبول للحصول على قيمة جداء الكثافة بالسرعة عند الوجه CD حسب العلاقة :

$$y(x + dx) = y(x) + \frac{\partial}{\partial x} y(x)\, dx$$

ولذلك فالمقدار داخل المعترضة يمثل قيمة الجداء $\varrho q'$ عند الوجه CD . الفرق بين N_{CD} و N_{AB} يمثل عدد النقاط التي تدخل من AB ولا تخرج من CD أي :

$$d N_1 = N_{AB} - N_{CD} = - \frac{\partial}{\partial q}(\varrho q')\, dq\, dp \tag{31}$$

بطريقة مماثلة تماماً نبرهن ان عدد النقاط الممثلة التي تدخل الوجه AD ولا تخرج من BC يساوي

$$dN_2 = N_{AD} - N_{BC} = - \frac{\partial}{\partial q}(\varrho p')\, dq\, dp \tag{32}$$

وبذلك يكون العدد الكلي للنقاط التي تدخل السطح dq dp ولا تخرج منه مساوياً

$$dN = d N_1 + d N_2 = - \left[\frac{\partial}{\partial p}(\varrho q') + \frac{\partial}{\partial p}(\varrho p') \right] d q\, dp \tag{33}$$

من جهة أخرى فان هذا العدد يساوي التغير الذي يطرأ على العدد N بين اللحظتين t و t + dt ، أي

$$dN = \frac{\partial \varrho}{\partial t}\, dp\, dq \tag{34}$$

ومن العلاقتين الاخيرتين (33) و (34) نستنتج أن

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_1} (\varrho q') + \frac{\partial}{\partial p} (\varrho p') = 0 \qquad (35)$$

ونشر أقواس هذه العلاقة يقود الى

$$\left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial q} q' + \frac{\partial \varrho}{\partial p} p' \right] + \varrho \left[\frac{\partial q'}{\partial q} + \frac{\partial p'}{\partial p} \right] = 0$$

أو

$$\frac{d \varrho}{d t} + \varrho \left[\frac{\partial q'}{\partial q} + \frac{\partial p'}{\partial p} \right] = 0 \qquad (36)$$

لكن معادلات هاميلتون (8) تعطي

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q'}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) = \frac{\partial^2 H}{\partial q \, \partial p} \\ \frac{\partial p'}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} \left(- \frac{\partial H}{\partial q} \right) = - \frac{\partial^2 H}{\partial p \, \partial q} \end{aligned} \right\} \qquad (37)$$

وأخيراً وباستعمال (37) في (36) نجد أن

$$\varrho = \text{ثابت} \qquad \text{أو} \qquad \frac{d \varrho}{d t} = 0 \qquad (38)$$

فالكثافة ϱ ثابتة وهو ما كنا نريد الوصول إليه .

ب) الحالة العامة :

نعود الآن الى الحالة العامة حيث للجملة n درجة حرية ، وحيث يكون عنصر « الحجم » في الفراغ الطوري

$$d v = dq_1 . dq_2 \ldots dq_n . dp_1 . dp_2 \ldots dp_n \qquad (39)$$

ليس من الصعب ان ندرك ان تغير كثافة النقاط الممثلة خلال التغير الزمني dt هو $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$ وان تغير العدد الكلي للنقاط الممثلة خلال هذه الفترة هو :

$$d N = \frac{\partial \varrho}{\partial t} \, dv \qquad (40)$$

ومن جهة أخرى ليس صعباً ان نعمم العلاقة (33) لنجد ان هذا التغير يساوي

$$dN = -\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\varrho q_1') + \frac{\partial}{\partial q_2}(\varrho q_2') + \dots + \frac{\partial}{\partial q_n}(\varrho q_n') + \frac{\partial}{\partial p_1}(\varrho p_1') + \frac{\partial}{\partial p_1}(\varrho p_2') + \dots + \frac{\partial}{\partial p_n}(\varrho p')\right]dv$$

أو :

$$dN = -\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_i}(\varrho q_i') + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_i}(\varrho p_i')\right]dv \quad (41)$$

وتعطي المعادلتان (40) و (41)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_i}(\varrho q_i') + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_i}(\varrho p_i') = 0 \quad (42)$$

ويقود انجاز الاشتقاقات الجزئية في العلاقة الأخيرة إلى

$$\left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varrho}{\partial q_i} q_i' + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varrho}{\partial p_i} p_i'\right] + \varrho\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i'}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i'}{\partial p^i}\right) = 0 \quad (43)$$

ونرى ان المترضة الأولى في هذه العلاقة تمثل المشتق الكلي لـ ϱ أي $\frac{d\varrho}{dt}$ وأن المترضة الثانية معدومة لأن

$$\frac{\partial q_i'}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i'}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} = 0$$

وذلك بالاستعانة بمعادلات هاميلتون التي أنف ذكرها . وأخيراً فان استعمال الحقيقتين الاخيرتين في العلاقة (43) يردها الى الشكل البسيط

$$\frac{d\varrho}{dt} = 0 \quad \text{أو} \quad \varrho = \text{ثابت}$$

فكثافة النقاط الممثلة لأوضاع الجمل الحركية في الفراغ الطوري تبقى ثابتة أثناء انتقال هذه الجمل في الفراغ العادي ، وذلك عندما تكون الجمل

محافظة ولها شكل هاميلتوني واحد وعدد واحد n من درجات الحرية .

VIII ـــ الحساب التغيري :

من القضايا التي تبرز أحياناً في الرياضيات والفيزياء قضية ايجاد منحن C ، اي ايجاد معادلته $y = g(x)$ ، يصل بين نقطتين A و B فاصلتاهما على الترتيب a و b بحيث يكون التكامل المنحني لتابع ما $F(x, y, y')$ على هـذا المنحني C بين النقطتين A و B أصغرياً او اعظمياً ، أي بحيث يكون التكامل

$$I = \int_a^b F(x, y, y')\, dx \tag{44}$$

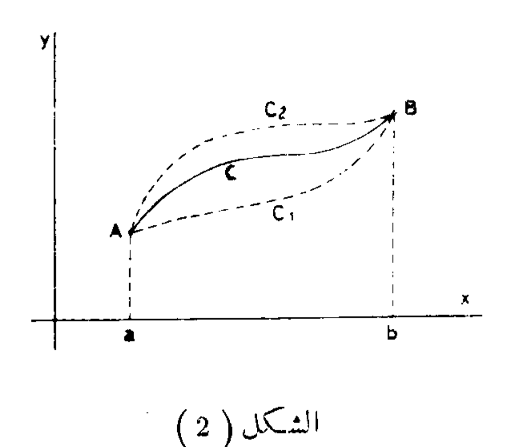
اعظمياً أو أصغرياً « احياناً نقول مستقراً » ، حيث $y' = dy/dx$ و F هو تابع ما معين ومعروف سلفاً . ويقال عن المنحني C الذي نجده أنه المنحني الحدي « او منحني الاستقرار » بالنسبة لهذا التكامل .

سنبرهن بعد قليل على أنه لكي يكون ايجاد هـذا المنحي C ممكناً يجب أن يحقق التابع $F(x, y, y')$ الشرط التالي :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{45}$$

يطلق على هذه العلاقة اسم « معادلة أولير » احياناً ومعـادلة « لاغرانج » احياناً اخرى . وسنطلق عليها للانصاف اسم « معادلة أولير ـ لاغرانج » .
ان هذه القضية وقضايا اخرى مشابهة تنتمي إلى حقل رياضي خاص نسميه « الحساب التغيري » او « حساب التغيرات » .

لنعد الآن إلى معادلة أولير ـ لاغرانج ونبين ضرورة تحققها كشرط لامكانية ايجاد منحن C يجعل التكامل I في العلاقـة (44) مستقراً اي ذا قيمة عظمى او صغرى بالنسبة لجميع التكاملات الأخرى للتابع F ذاته على جميع المنحنيات الأخرى الممكنة بين A و B . لنفرض أن المنحني الذي يجعـل التكامل I مستقراً هو المنحني C المبـين في الشكل (2) والذي معادلته



الشكل (2)

$$y = f(x) \quad , \quad a \leqslant x \leqslant b$$

ولنختر تابعاً آخر لـ x مثل $\eta(x)$ بحيث ينعدم عندما $x = a$ و $x = b$. أي :

$$\eta(a) = 0 \qquad \eta(b) = 0$$

وليكن ε مقداراً صغيراً بقدر ما نرغب . عندئذ يكون المنحني C_1 الذي يمثله التابع

$$y = f(x) + \varepsilon \eta(x) \tag{46}$$

مجاوراً لـ C . فاذا حسبنا التكامل (44) على المنحني C_1 كانت النتيجة كالتالي :

$$I(\varepsilon) = \int_a^b F(x, b + \varepsilon\eta, b' + \varepsilon\eta')\, dx \tag{47}$$

وحتى يكون هذا التكامل استقرارياً عند $\varepsilon = 0$ يجب أن يكون

$$\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0} = 0 \tag{48}$$

ان ε تظهر في F وبالتالي في التكامل عن طريق

$$y = b + \varepsilon \eta \;,\; y' = b' + \varepsilon \eta' \qquad (49)$$

ولذلك يأخذ الشرط (48) الشكل الجديد

$$\frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial y} \frac{d y}{d \varepsilon} + \frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial y'} \frac{d y'}{d \varepsilon} = 0$$

وبتطبيق هذه النتيجة على التكامل (47) نجد

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) d x = 0$$

وحساب التكامل بالتجزئة يقود الى العلاقة

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \eta \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx = 0 \quad (50)$$

ان الحد الأول من التكامل الأخير معدوم لأن $\eta(b) = 0 , \eta(a) = 0$ حسبما فرضنا سابقاً . ويبقى

$$\int_a^b \eta \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)\right] d x = 0 \qquad (51)$$

لكن التابع η اختياري الى حد كبير ؛ إذ أن الشرط المفروض عليه لايتعدى انعدامه عند $x = a$ و $x = b$. وهناك عدد لانهاية له من التوابع التي تحقق هذا الشرط . وإذا لاحظنا أن الشرط (51) يجب أن يتحقق مهما كان التابع $\eta(\varepsilon)$ ادركنا عندئذ أنه يجب أن يكون

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{d x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

أو :

$$\frac{d}{d x}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad (52)$$

وهو الشرط الذي كنا نسعى نحو البرهان على وجوب تحققه .

ان هذه النتيجة يمكن أن تعمم فتشمل تكاملات من الشكل

$$\int_a^b F(x, y_1, y_1', y_2, y_2', \ldots, y_n, y_n')\, dx \qquad (53)$$

حيث يمكن ايجاد منحنيات C_1 و C_2 و ... و C_3 تجعل هذا التكامل (53) استقرارياً على كل منها اذا تحققت الشروط

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1'} - \frac{\partial F}{\partial y_1} &= 0 \\ \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_2'} - \frac{\partial F}{\partial y_2} &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_n'} - \frac{\partial F}{\partial y_n} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

او بشكل مختزل

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \;,\; (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (55)$$

لنعد الآن إلى التكامل $I(\varepsilon)$ ولننشره بجوار $\varepsilon = 0$ حسب سلسلة تايلور

$$I(\varepsilon) = I(0) + \varepsilon\left[\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\frac{d^2 I(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\right]_{\varepsilon=0} + \ldots$$

$$= I(0) + \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right) dx$$

+ (حدود من الدرجة الثانية فما فوق بالنسبة لـ ε) +

ويكتب ذلك بالشكل

$$\frac{I(\varepsilon) - I(o)}{\varepsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx \qquad (56)$$

(حدود من الدرجة الأولى فما فوق بالنسبة لـ ε) +

وتدل هذه العلاقة على أن التكامل الموجود في الطرف الأيمن منها يساوي تغير التكامل $I(\varepsilon)$ الذي يعبر عنه الطرف الأيسر . ونكتب هذا التغير بالشكل

$$\delta \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

ولقد رأينا أن هذا التغير يجب أن ينعدم كشرط اساسي لاستقرار التكامل . ان شرط الاستقرار هذا يأخذ إذن الشكل الجديد

$$\delta \int_a^b F(x, y, y')\, dx = o \qquad (57)$$

IX — مبدا هاميلتون (مبدا الفعل الاصغر) :

ان الشبه الشديد بين المادلات (54) ومعـادلات لاغرانج للجمل المحافظة يجعلنا نعتبر مسألة إيجاد منحنيات الاستقرار للتكامل

$$\int_{t_1}^{t_2} L\left(t, q_1, q_1', q_2, q_2', \ldots, q_n, q_n'\right) dt \qquad (58)$$

حيث L هو تابع لاغرانج لجملة محافظةاحداثياتها المعممة هي q_i وسرعها المعممة q_i' . ونرى استناداً إلى ما تقدم في الفقرة السابقة وجوب تحقق الشروط

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i'} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = o, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (59)$$

وهذه المادلات هي فعلاً معادلات لاغرانج للجمل المحافظة التي رأيناها في الفصل السابق واستخرجناها بطريقة مختلفة .

لقد قادت هذه النتيجة هاميلتون إلى وضع مبدئه التالي :

« ان الجملة الميكانيكية المحافظة تتحرك بين اللحظتين t_1 و t_2 بحيث يكون التكامل $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ استقرارياً » .

يطلق على هذا التكامل اسم « تكامل الفعل » . ولما كان هذا التكامل أصغرياً في معظم الحالات فان هذا المبدأ يطلق عليه احياناً اسم « مبدأ هاميلتون للفعل الأصغر » أو اختصاراً « مبدأ الفعل الأصغر » . ويعبر عن هذا المبدأ بالشكل الرياضي

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0 \tag{60}$$

حيث δ رمز التغير .

ونشير أخيراً الى ان بعض المراجع تستخرج معادلات لاغرانج باستعمال مبدأ هاميلتون وحساب التغير الأخير (60) الذي يقود مباشرة الى المعادلات المنشودة .

X — التحويلات القانونية :

ان سهولة معالجة كثير من المسائل الميكانيكية أمر منوط بحسن اختيار الاحداثيات المعممة التي تستعمل في المسألة . ولذا فان من المرغوب فيه أن نعالج التحويلات من مجموعة من الاحداثيات المعممة الى مجموعة أخرى . فاذا اعتبرنا مجموعة الاحداثيات المعممة الموضعية q_i والاندفاعية p_i كمجموعة أولى (أو قديمة) واعتبرنا مجموعة أخرى (جديدة) من الاحداثيات المعممة الموضعية Q_i والاندفاعية P_i ، فان الانتقال من المجموعة القديمة إلى المجموعة الجديدة يتم وفق علاقات تحويل من الشكل

$$Q_i = Q_i \left(q_1 , q_2 , \ldots , q_n , p_1 , p_2 , \ldots , p_n , t \right) \qquad (61)$$

$$P_i = P_i \left(q_1 , q_2 , \ldots , q_n , p_1 , p_2 , \ldots , p_n , t \right) \qquad (62)$$

حيث i تأخذ جميع القيم الممكنة من 1 الى n وحيث n عدد الاحداثيات الوضعية في كل من المجموعتين . ونستطيع ان نختزل علاقات التحويل هذه على النحو التالي

$$Q = Q (q , p , t) \qquad (63)$$

$$P = P (q , p , t) \qquad (64)$$

وتعني هاتان العلاقتان ان كلاً من الاحداثيات الجديدة يمكن أن تكون تابعة لجميع الاحداثيات القديمة وللزمن .

سنتقيد بنوع واحد من هذه التحويلات ندعوه بالتحويلات القانونية ، وهي التي يوجد من أجلها تابع هاميلتوني للاحداثيات الجديدة

$$\mathcal{H} = \mathcal{H} (Q_1 , Q_2 , \ldots , Q_n , P_1 , P_2 , \ldots , P_n , t \qquad (65)$$

او بصورة مختزلة

$$\mathcal{H} = \mathcal{H} (Q , P , t) \qquad (66)$$

بحيث يكون

$$Q_i' = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \text{و} \quad P_i' = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} \qquad (67)$$

وفي مثل هذه الحالة ندعو الاحداثيات Q_i و P_i بالاحداثيات القانونية .

ان تابعي لاغرانج $L (q , p , t)$ في المجموعة القديمة و $L (Q , P , t)$ في المجموعة الجديدة يرتبطان بتابعي هاميلتون في هاتين المجموعتين وفق العلاقتين التاليتين :

$$H = \sum_i p_i q_i' - L \quad \text{و} \quad \mathcal{H} = \sum_i P_i Q_i' - \mathcal{L} \qquad (68)$$

حيث يؤخـذ المجموع على جميع الاحداثيات الموافقة لقيم الدليل i من 1 إلى n . فللتابع الهاميلتوني شكل واحد في الجملتين القديمة والجديدة .

XI — التوابع المولدة وشرط التحويلات القانونية :

يمكننا ان نبين الآن أن التحويل يكون قانونياً إذا وجد تابع G ندعوه بالتابـع المولد بحيث يحقق العلاقة

$$\frac{dG}{dt} = L - \mathscr{L} \tag{69}$$

فحسب مبدأ هاميلتون يجب ان يكون

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 \quad \text{و} \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\, dt = 0 \tag{70}$$

ونجد من ذلك أيضاً أن

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L - \mathscr{L})\, dt = 0 \tag{71}$$

وهذه العلاقة لا تعني أن $\mathscr{L} = L$ وإنما تعني أن أحد هذين التابعين يختلف عن الآخر بمقدار هو المشتق الزمني $\frac{dG}{dt}$ لتابـع مـا G ، حيث تصبـح العلاقة الأخيرة عندئذ

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dG}{dt}\, dt = \delta \left[G(2) - G(1) \right] = 0 \tag{72}$$

وذلك لأن التغيرات تنعدم عند النقطتين المتطرفتين للتكامل ، إذ نلاحظ أن $G(2) - G(1)$ مقدار ثابت تغيره معدوم . إذن ، إذا وجد تابـع مثل G بحيث أن مشتقه يحقق العلاقة (69) فان التحويل من المجموعة القديمة إلى المجموعة الجديدة يكون قانونياً .

ويبرهن كذلك ان التحويل يكون قانونياً إذا كان

$$\sum_i p_i \, dq_i - \sum_i P_i \, d\, Q_i = \text{تفاضلاً تاماً} \qquad (73)$$

وكثيراً ما يكون استعمال هذه الخاصة للبرهان على أن تحويلاً ما هو قانوني أسهل من اتباع طريقة التابع المولد .

لنفرض الآن أن هناك تابعاً مولداً

$$G = G(q_i , Q_i , t) \qquad (74)$$

للاحداثيات الوضعية القديمة والجديدة والزمن . ولنفاضل هذا التابع بالنسبة للزمن ، حيث نجد

$$d\,G = \sum_i \frac{\partial G}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial G}{\partial Q_i} d\,Q_i + \frac{\partial G}{\partial t} d\,t \qquad (75)$$

واضافة إلى ذلك فان التابع G يحقق العلاقة (69) أي

$$d\,G = (L - \mathscr{L})\,dt = \left[\sum_i p_i \, q_i' - H - \sum_i P_i Q_i' + \mathscr{H} \right] d\,t$$

$$= \sum_i p_i \, dq_i - \sum_i P_i dQ_i + (\mathscr{H} - H)\, d\,t \qquad (76)$$

وتؤدي مقارنة العلاقتين (75) و (76) إلى ما يلي

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad \text{و} \quad P_i = -\frac{\partial G}{\partial Q_i} \quad \text{و} \quad \mathscr{H} - H = \frac{\partial G}{\partial t} \qquad (77)$$

ولما كان $\mathscr{H}$ هو الهاملتوني في مجموعة الاحداثيات الجديدة فان

$$P_i' = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q_i} \quad \text{و} \quad Q_i' = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial P_i} \qquad (78)$$

وهكذا نجد أننا ولدنا من التابع G الاندفاعات القديمة p_i والاندفاعات الجديدة P_i ، كما تبين العلاقات (77) . وفي حالات أخرى للتوابع المولدة نتبع طريقة مماثلة لتوليد الاحداثيات التي لا تظهر في التابع المولد .

XII — معادلة هاميلتون ـ جاكوبي :

اذا تمكنا من إيجاد تحويل قانوني يقود إلى أن

$$\mathscr{H} \equiv 0$$

فاننا نرى من العلاقتين (78) أن الاحداثيات الجديدة P_i و Q_i كلها ثابتة . وهذا يعني أن هذه الاحداثيات هي احداثات متنكرة . ونستطيع عندئذ بواسطة التحويل أن نجد الاحداثيات الطورية p_i و q_i ونعين حركة المجموعة . ويتوقف الأمر على ايجاد التابع المولد المناسب . فمن المعادلة (77) وبوضع $\mathcal{H} \equiv 0$ نجد ان التابع المولد G يجب ان يحقق المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{\partial G}{\partial t} + H(p_i , q_i , t) = 0 \tag{79}$$

أو

$$\frac{\partial G}{\partial t} + H\left(\frac{\partial G}{\partial q_i} , q_i , t\right) = 0 \tag{80}$$

وهذه العلاقة التفاضلية الجزئية هي ما يسمى بمعادلة هاميلتون ـ جاكوبي .

ولكي نحقق غايتنا يجب إيجاد حل هذه المعادلة وايجاد التابع G . ولما كانت هذه المعادلة تحتوي على $n + 1$ متحولاً مستقلاً هي q_1 و $q_2, \dots, q_n, t$ فان الحل الكامل لهذه المعادلة يتضمن $n + 1$ ثابتاً كيفياً . وباسقاط أحد هذه الثوابت بسبب خاصة التجميعية فان الثوابت المتبقية كلها غير تجميعية . وبالتالي يكون الحل بدلالة n من الثوابت β_i حيث $i = 1, 2, \dots, n$. إذن

$$G = G(q_1 , q_2 , \dots , q_n , \beta_1 , \beta_2 , \dots , \beta_n , t) \tag{81}$$

وعندما يتوفر هذا الحل فاننا نحصل على الاحداثيات الاندفاعية القديمة من العلاقات

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} , \quad i = 1 , 2 , \dots , n \tag{82}$$

إذا ادركنا أن الثوابت β_i تقوم مقام الاندفاعات الجديدة P_i كان عندئذ

$$Q_i = \frac{\partial G}{\partial P_i} = \frac{\partial G}{\partial \beta_i} = \gamma_i , \quad i = 1 , 2 , \dots , n \tag{83}$$

علماً بأن γ_i ثوابت ، حيث سبق أن قلنا إن Q_i و P_i كلها ثوابت . وباستعمال

المعادلات (83)، وعددها n وتحوي n متحولاً مستقلاً هي q_i ، نستطيع أن نجد جميع هذه المتحولات q_i كتوابع بدلالة β_i و γ_i و t . وهذه الاحداثيات بدورها تعين الحركة تمام التعيين .

XIII — معترضات بواسون :

ان للمعادلات القانونية للحركة صيغة أخرى بدلالة ما يسمى « بمعترضات بواسون » وتتميز هذه الصيغة بالاختصار الشكلي لهذه المعادلات من جهة ، وبتطبيقاتها في ميكانيك الكم بصورة خاصة من جهة أخرى .

لتعريف هذه المعترضات ، نفرض فراغاً طورياً احداثياته q_i و p_i . ونفرض تابعين F و G لجميع هذه الاحداثيات الطورية بصورة عامة . نسمي معترضة بواسون لهذين التابعين ونرمز لها بالرمز $[F , G]$ المجموع التالي :

$$[F , G] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right) \qquad (84)$$

حيث للترتيب بين F , G وبين p_i و q_i في الاشتقاق أهمية يجب الانتباه إليها .

XIV — معادلات الحركة بدلالة معترضات بواسون :

لنحسب الآن معترضتي بواسون للهاميلتوني H وكل من الاحداثيات الوضعية q_i والاندفاعية p_i أي $[H , q_i]$ و $[H , p_i]$.

$$[H , q_i] = \sum_{j=i}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial q_i}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \right) \qquad (85)$$

فاذا لاحظنا أن $\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0$ و $\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = 0$ من أجل $i \neq j$

و $1 = \frac{\partial q_i}{\partial q_i}$ واستعملنا معـادلات هاميلتون $q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ واستعملنا كل ذلك في العلاقة (85) وصلنا إلى ما يلي :

$$\left.\begin{array}{l}[H, q_i] = q'_i \\ [H, p_i] = p'_i\end{array}\right\} \quad (86)$$

حيث نحصل على العلاقة الثانية بطريقة مماثلة . وتمثل هذه الملاقات الشكل الجديد لمعادلات الحركة بدلالة معترضات بواسون لهاميلتوني الجملة مع الاحداثيات الطورية .

XV — خواص معترضات بواسون :

تحقق معترضات بواسون مجموعة الخواص التالية التي نترك للطالب التحقق من صحتها وذلك بالتعويض المباشر ونفرض في كل ذلك استعمال توابـع للاحداثيات الطورية q_i ، p_i .

$$[F, G] = -[G, F] \quad (87)$$

$$[F, C] = 0 \quad , \quad C \text{ ثابت} \quad (88)$$

$$[F, G_1 + G_2] = [F, G_1] + [F, G_2] \quad (89)$$

$$[F_1 + F_2, G] = [F_1, G] + [F_2, G] \quad (90)$$

$$[F, G_1 G_2] = [F, G_1] G_2 + [F, G_2] G_1 \quad (91)$$

$$[F_1 F_2, G] = [F_1, G] F_2 + [F_2, G] F_1 \quad (92)$$

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad , \quad \forall i, j \quad (93)$$

$$[q_i , p_j] = [p_j , q_i] = o \quad i \neq j \tag{94}$$

$$[q_i , p_i] = -1 \tag{95}$$

$$[p_i , q_i] = 1 \tag{96}$$

$$[H , F] = F' = \frac{dF}{dt} \tag{97}$$

ومن هذه الخاصة تنتج معادلات الحركة

$$[H , q_i] = q_i' \quad و \quad [H , p_i] = p_i'$$

$$[H , t] = 1 \tag{98}$$

$$[F , q_i] = \partial F / \partial p_i \tag{99}$$

$$[F , p_i] = - \partial F / \partial q_i \tag{100}$$

XVI — التابعان المترافقان والتابعان المتبادلان :

نقول عن التابعين F , G إنهما مترافقان فيما اذا كان $[F, G] = \pm 1$. ونلاحظ بصورة خاصة أن q_i ، p_i مترافقان لأن $[p_i , q_i] = 1$ و $[q_i , p_i] = -1$. كما أن الهاميلتوني H والزمن t مترافقان لأن $[H , t] = 1$.

ونقول عن التابعين F , G أنهما متبادلان فيما بينهما إذا تحقق الشرط $[G , F] = [F , G]$. الا ان الخاصة الأولى (97) من خواص معترضات بواسون تبين أن

$[G . F] = - [F . G]$.ويستنتج من ذلك ان

$[F , G] = - [F . G]$ أي $[F , G] = o$.

إذا لاحظنا الخاصة الحادية عشر (97) لمترضات بواسون أي

$$[H , F] = \frac{dF}{dt}$$

استنتجنا أن الشرط اللازم ليكون تابع ما F مرافقاً قانونياً للهاميلتوني هو أن يكون

$$\frac{dF}{dt} = F' = 1$$

وان الشرط اللازم ليكون F تبادلياً مع H هو أن يكون

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

أي ان الهاميلتوني H تبادلي مع الثوابت .

* * *

الفصل الرابع عشر

الميكانيك النسبوي

- المنهج الاساسي لنظرية النسبية الخاصة
- تحويلات لورنتز
- تحويلات لورنتز المعاكسة
- انسجام تحويلات لورنتز مع تحويلات غاليليه
- فراغ منكوفسكي رباعي الابعاد
- تقاصر الطول
- تطاول الزمن
- تحويلات لورنتز للسرع
- انسجام تحويلات لورنتز للسرع مع تحويلات غاليليه ومع مبدأ آنشتاين
- تحويلات لورنتز للتسارعات
- انسجام تحويلات لورنتز للتسارعات مع تحويلات غاليليه ومع مبدأ آنشتاين
- التحريك النسبوي

لقد استندت صياغة الميكانيك التقليدي على مجموعـــة من المفاهيم وهي مفاهيم المكان والزمان والمادة ، ومجموعة من المبادىء او القوانين وهي قوانين نيوتن في التحريك . وقد أكد الميكانيك التقليدي على نجاحه في تفسير جميع الحركات ودراستها طالما أن السرع صغيرة جداً بالنسبة لسرعـة الضوء . الا أن الميكانيك التقليـدي هذا عجز عن تفسير جميع الحركات التي تنطوي على سرع من مرتبة سرعة الضوء حيث جاءت النتائج التجريبية مغايرة لما يتنبأ به الميكانيك التقليدي . وهذا يعني بالطبع أن مبادىء الميكانيك التقليدي (قوانين نيوتن) ليست صالحة لتمثيل الحوادث الحركية حينما تضمنت هذه الحوادث سرعاً كبيرة من مرتبة سرعة الضوء . ولا بد لذلك من تعديل هذه المبادىء بحيث نضع الميكانيك في قالب آخر ينسجم مع النتائج التجريبيـة التي تنطوي على السرع العالية ، ومن أجل السرع المنخفضة بطبيعة الحال . وهذا ما يتوفر في ما نسميه « نظرية النسبية » التي سنعالجها في هذا الفصل بشكلها المبسط المسمى « نظرية النسبية الخاصة » .

ويجب ألا يلتبس الامر بين « الميكانيك النسبوي » ، نسبة الى نظريــة النسبية وبين « ميكانيك الكم » المبني على أساس « النظرية الكومية » والذي يعالج الحركات في اطار نظرية النسبية لا في اطار النظريــة التقليديــة في الميكانيك بصورة خاصة وفي الفيزياء كلها بصورة عامة . ونود أن نشير أيضاً الى أنه لا يوجد ترابط ملزم بين نظرية النسبية ونظرية الكم من حيث أن الصفة النسبوية والصفة الكومية لاتظهران بنفس الحدة أو الأهميــة في كل حادث فيزيائي . فهناك حوادث تكون فيها تأثيرات النظرية الكومية ضعيفة أو غير مهمة على عكس تأثيرات نظرية النسبية ، وبالعكس . ولهذا يجب أن ننظر الآن في التعديلات المناسبة في صياغة الميكانيك التي يتطلبها الميكانيك النسبوي بغض النظر عما يمكن أن يفرضه ميكانيك الكم . وسنركز اهتمامنا

بصورة رئيسية حول كيف يمكن أن ندخل النسبية الخاصة ضمن إطـــار الميكانيك التقليدي .

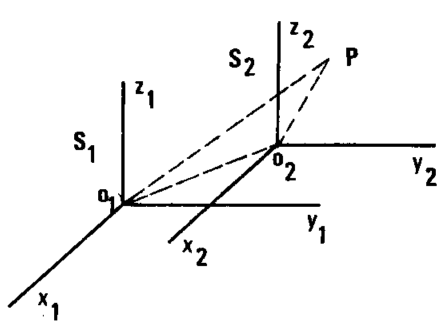
I — المنهج الاساسي لنظرية النسبية الخاصة :

كنا في دراسة الحوادث الميكانيكية في إطار الميكانيك التقليدي نعتبر ما سميناه بجمل المقارنة العطالية، وهي التي تتحرك في الفراغ حركة مستقيمة منتظمة . ورأينا عندئذ إن قانون نيوتن الثاني في التحريك :

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \qquad (1)$$

لايصح إلا في جملة مقارنة عطالية ، ويعتبر أساساً لدراسة الحركات في هذه الجمل . وذكرنا أن الجمل الأخرى المتحركة حركة دورانية أو حركة مستقيمة متسارعة أو كلتيهما معاً هي كلها جمل لا عطالية ولايصح فيها تطبيق قانون نيوتن المذكور . ورأينا في حينه أنه لابد من تعديل هذا القانون ليصح في جملة لا عطالية .

ويمكن أن نبين بسهولة أن كل جملة مقارنه تتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لجملة عطالية هي أيضاً جملة عطاليـــة يصح فيها قانون نيوتن ويكون لتسارع جسم متحرك ما قياس واحد في الجملتين . فاذا كانت الجملة S_1 عطالية وكانت S_2 تتحرك بالنسبة لها بسرعة ثابتة $\vec{v}$ ، كما يبين الشكل (1) ، وكان P جسيماً متحركاً في كل من الجملتين فان :



الشكل (1)

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{v}\, t \qquad (2)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v} \qquad (3)$$

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 \qquad (4)$$

وذلك بالاشتقاق مرتين متتاليتين بالنسبة للزمن، حيث $\vec{r}_1$ و $\vec{v}_1$ و $\vec{a}_1$ موضع الجسم وسرعته وتسارعه بالنسبة للجملة S_1 وحيث $\vec{r}_2$ و $\vec{v}_2$ و $\vec{a}_2$ موضعه وسرعته وتسارعه بالنسبة للجملة S_2 . وهذه العلاقات (2) و (3) و (4) هي مانسميه بتحويلات غاليليه للمكان والسرعة والتسارع ، وحيث في هذه التحويلات يعتبر الزمن واحداً في الجملتين . وتفيد العلاقة (3) أن سرعتي المتحرك متباينتان في الجملتين، بينما تفيد العلاقة (4) أن تسارعيه متساويان. وهذا يقود الى أنه اذا كانت سرعة الضوء هي $\vec{C}$ بالنسبة للجملة S_1 فانها تساوي $\vec{C} - \vec{v}$ بالنسبة للجملة S_2 . لكن قياسات وتحريات عديدة ، مثل تجربة مايكلسون ـ مورلي ، لقياس سرعة الضوء في جمل مختلفة أثبتت أن سرعة الضوء ثابتة لاتختلف باختلاف جمل المقارنة التي تقاس فيها . وهذا ماحدا بآنشتاين الى وضع مبدئه الشهير القائل بأن « سرعة الضوء واحدة بالنسبة لجميع الجمل » . ومن هنا نجد أنه لابد من ايجاد تحويلات أخرى تحافظ على قيمة واحدة لسرعة الضوء في جميع الجمل . وهذه التحويلات المنشودة هي « تحويلات لورنتز » التي سنعالجها في الفقرة التالية . ولقد بين آنشتاين أن مثل هذه التحويلات تتطلب اعادة النظر في مفهوم « الزمن » ومفهوم « التزامن » أو التواقت . ولقد ذهب آنشتاين الى أبعد من ذلك حيث فرض أن جميع الحوادث الفيزيائية يجب أن تتماثل أو تتكافأ في جميع الجمل العطالية . وهذا ما يعرف « بمبدأ التكافؤ » . وبموجب ذلك لايمكن تمييز جملة عطالية عن جملة عطالية أخرى .

ولكي نلخص ماتقدم نقول إن قوانين الفيزياء يجب أن تصاغ في اطار مبدأ آنشتاين ، أو مبدأ النسبيــة ، المتمثل بشقيه « وحدانية سرعة الضوء وتكافؤ الحوادث الفيزيائية في جميع الجمل المطالية » . وهـــذا مايقودنا مباشرة الى الجزم بأن التحويلات من جملة عطالية الى جملة عطاليــة أخرى ، وهي تحويلات لورنتز ، يجب ألا تتعارض مع هذا المبدأ . هذا من جهة ومن جهة أخري يجب أن تنسجم تحويلات لورنتز مع تحويلات غاليليه من أجل السرع الصغيرة ، أي أن تحويــــلات لورنتز يجب أن تقبل تحويلات غاليليه كتقريب لها من أجل تلك السرع . ويجب ، فوق ذلك،أن تقبل قوانين الفيزياء النسبوية قوانين الفيزياء التقليدية (اللانسبوية) كتقريبات لها من أجل السرع اللانسبوية (الصغيرة بالنسبة لسرعة الضوء) .

يتبين مما سبق أن منهج نظرية النسبية الخاصة ذو شقين :

أولا) يجب أن نربط بين جملتين عطاليتين بتحويلات تحافظ على وحدانيــة سرعة الضوء .

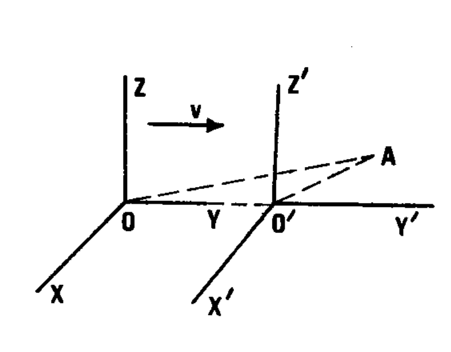
ثانيا) يجب أن نخضع حوادث الفيزياء الى قوانين تحافظ على تكافؤ هـــذه الحوادث في مختلف الجمل العطالية .

أن المعلومات التجريبية الكثيرة المتوفرة والتحقيقات التي أجريت حتى الان تتفق مع الصورة الفيزيائية التي نتجت عن هذا المنهج . وهذا هو ، حتى الان المبرر الكافي لقبول مبدأ آنشتاين الاساسي ، أو مبدأ النسبية .

II — تحويلات لورنتز :

لنعد مرة ثانية الى تحويلات غاليليه والتي تفترض أن الزمن واحد بالنسبة للجملتين وأن الاحداثيات المتعامدة مع السرعة $\vec{v}$ لا تتأثر بهذه السرعـة . عندئذ نستطيع أن نكتب هذه التحويلات من الجملة S الى الجملة S′ مفترضين أن S′ تتحرك بسرعة v موازية للمحور o z ، كما يبين الشكل (2) . وهذه التحويلات هي عندئذ كما يلي :

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= z - v\,t \\ t' &= t \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$



الشكل (2)

لنفرض أنه في لحظة انطباق الجملتين على بعضهماوبالتالي انطباق مركزيهمـا o و o′ أطلقت ومضة ضوئية من المبدأ المشترك . ان تحويلات غاليليه المبينة في العلاقات (5) تبين أن مراقباً في الجملة S وآخر في الجملة S′ يريان الامواج الضوئيـة تنتشر بسرعتين مختلفتين . وهذا ماثبت بطلانه حيث أن سرعـــة انتشار الضوء واحدة بالنسبـــة لجميع الجمل المطالية .

وفي الحقيقة ، يرى المراقب في S أن الضوء ينتشر بسرعة واحدة C في جميع الجهات ويرى أن الامواج الضوئية كرات مراكزها في o . كما أن المراقب الثاني في S′ يرى الضوء ينتشر بسرعة واحدة C في جميع الاتجاهات ويرى أن الامواج الضوئية كرات مراكزها في o′ . وفوق ذلك فان المراقب في S يرى أن الموجة الضوئية قد وصلت الى A في اللحظة t بعـد أن قطعت مسافة قدرها C t ، ويكتب :

$$r = C\,t \qquad (6)$$

أما المراقب في S′ فيرى أن الموجة الضوئية قد وصلت الى A في اللحظة t′ بعد أن قطعت مسافة قدرها C t′ ، ويكتب :

$$r' = C\,t' \qquad (7)$$

أي أن :

$$r^2 - C^2 t^2 = 0 \quad و \quad r'^2 - C^2 t'^2 = 0 \qquad (8)$$

وهذا بالطبع لا يتفق مع تحويلات غاليليه (5) . والتحويل المطلوب يجب أن يحقق العلاقتين (8) معاً . أي أنه يجب أن يعدم المقدارين :

$$R^2 = r^2 - C^2 t^2 \quad و \quad R'^2 = r'^2 - C^2 t'^2 \qquad (9)$$

وهذا يدل على أن هذين المقدارين متناسبان وعامل تناسبهمـــا مستقل عن المكان وعن الزمان وقد يكون تابعاً لـ v فقط . أي :

$$R'^2 = f(v) R^2 \qquad (10)$$

وبما أن الجملتين S و 'S تلعبان دورين متكافئين ومتماثلين فان بامكاننـا أن نكتب أيضاً :

$$R^2 = f(-v) R'^2 \qquad (11)$$

لأن S تتحرك بالنسبة لـ 'S بسرعة v − . ومن (10) و (11) نجد :

$$f(v)\ f(-v) = 1 \qquad (12)$$

ومن جهة ثانية لو أننا عكسنا اتجاهـــات جميع محاور الجملتين لتبدلت v بـ v − دون أن يتبدل R^2 و R'^2 . أي لكان عندئذ :

$$R'^2 = f(-v) R^2 \qquad (13)$$

حيث تعطينا مقارنة (10) و (13) أن :

$$f(-v) = f(v) \qquad (14)$$

وأخيراً فان مقارنة (12) و (14) تبين أن :

$$f(v) = 1 \quad (15)$$

وهذا يدل دلالة قاطعة على أن التحويلات التي نبحث عنهـــا يجب أن تحقق العلاقة المتكافئة التالية :

$$\left.\begin{aligned} R'^2 &\equiv R^2 \\ r'^2 - C^2 t'^2 &\equiv r^2 - C^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 - C^2 t'^2 &\equiv x^2 + y^2 + z^2 - C^2 t^2 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

والعلاقة الاخيرة بأشكالها الثلاثة تبين أن t' مختلفة عن t نظراً لان r' مختلفة عن r . أي أن الزمن ليس واحداً بالنسبة للجملتين المطاليتين S و S'. وهذا هو أول اختلاف بين التحويلات التي نبحث عنها وتحويلات غاليليه .

اذا عدنا الى الشكل (2) نرى واضحاً أن الانتقال من احدى الجملتين الى الاخرى لا يؤثر على الاحداثيين المامدين للسرعـة $\vec{v}$. وهـــذا يجعل $x' = x$ و $y' = y$. ولما كان $o o' = v t$ بالنسبة لمراقب في S فان $z = v t$ من أجل $z' = 0$. وهذا يقترح أن تكون علاقات التحويل على النحو التالي :

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= a (z - v t) \\ t' &= b (t - k z) \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

حيث a و b ثابتان لا يتعلقان بالاحداثيات أو بالزمن وينتهيان الى الواحد من أجل السرع الصغيرة بالنسبة لسرعـــة الضوء ، وحيث k ثابت لايتعلق بالاحداثيات او بالزمن وينتهي الى الصفر من أجل السرع الصغيرة بالنسبـة لسرعة الضوء ، وكل ذلك لكي تأتي التحويلات المطلوبة منسجمة مع تحويلات غاليليه في الميكانيك التقليدي .

ضمن هذه الاعتبارات ، اذا استعملنا العلاقات (17) في المتطابقة (16) فان الاخيرة تأخذ الشكل التالي :

$$x^2 + y^2 + (a^2 - b^2 k^2 C^2) z^2 - 2 (a^2 v^2 - k b^2 C^2) z t$$

$$- (b^2 - a^2 v^2 / C^2) C^2 t^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - C^2 t^2 \qquad (18)$$

ولما كان من الواجب أن تتحقق هذه العلاقة مهما تكن المتحولات الاحداثية والزمن وجب عندئذ أن تتطابق الامثال في الطرفين . وهذا يعطي :

$$\left.\begin{aligned} a^2 - b^2 k^2 C^2 &= 1 \\ b^2 - a^2 v^2 / C^2 &= 1 \\ a^2 v^2 - k b^2 C^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

وبحل مجموعة المعادلات المترافقة هذه نجد :

$$\left.\begin{aligned} a = b &= 1 / \sqrt{1 - \beta^2} \\ k &= v / C^2 \\ \beta &= v / C \quad \text{حيث} \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

وتصبح عندئذ علاقات التحويل (17) على النحو التالي :

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \frac{z - v t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ t' &= \frac{t - v z / C^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

وقد سميت هذه العلاقات باسم تحويلات لورنتز ، وهو الذي حصل عليها عام 1890 أثناء دراسته للحقل الكهرطيسي لشحنة متحركة

ان العلاقة (16) توحي بأن المقدار C t يسلك مسلك الاحداثيات وهو مقدار له طبيعة الطول (وهي طبيعة الاحداثيات الديكارتية) وعلاوة على ذلك هو مقدار مختلف بين الجملتين ، يصح اعتباره احداثياً رابعاً . ولهذا يمكننا أن نمثل الاحداثيات في كل من الجملتين S و S' بمصفوفتين عموديتين X و X' بالترتيب أي :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ C\,t \end{bmatrix} ، \quad X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ C\,t' \end{bmatrix} \qquad (22)$$

وعندئذ نستطيع كتابة معادلات تحويل لورنتز على النحو التالي :

$$X' = M\,X \qquad (23)$$

حيث M مصفوفة تحويل لورنتز المعطاة بالعلاقة :

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 0 & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} \qquad (24)$$

ملاحظة :

نلاحظ فيما سبق أن حركة الجملة S' بالنسبة لـ S وفق السرعة $\vec{v}$ هي حركة موازية للمحور الاحداثي الثالث o z . ولو كانت هذه الحركة موازية لمحور آخر مثل المحور o y لأصبحت تحويلات لورنتز كالتالي :

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= \frac{y - v\,t}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - v\,y / C^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

ولأصبحت مصفوفة تحويل لورنتز :

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} \qquad (26)$$

III - تحويلات لورنتز المعاكسة :

لتمثل تحويلات لورنتز المعاكسة بالعلاقات التي تعبر عن الاحداثيات في الجملة S بدلالة الاحداثيـات في الجملة S′ . ويمكن الحصول على هـــذه العلاقات بادراك أن الجملة S تتحرك بالنسبة للجملة S′ بسرعة قدرها v — وبتطبيق الطريقة نفسها . وهذا يقود الى مايلي :

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \\ z &= \frac{z' + v\,t}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t &= \frac{t + v\,z' / C^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

أو بدلالة المصفوفات .

$$X = M' X' \qquad (28)$$

حيث :

$$M' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} \qquad (29)$$

IV — انسجام تحويلات لورنتز مع تحويلات غاليليه :

بما أن التجربة والواقع أثبتا أن تحويلات غاليليه صحيحة من أجل السرع الصغيرة بالنسبة لسرعة الضوء (أي في حقل الفيزياء التقليدية) فان تحويلات لورنتز يجب ألا تتعارض معها في تلك الحالة . وهذا ماهو قائم بالفعل حيث يمكننا أن نرى أن تحويلات غاليليه هي تقريب جيد لتحويلات لورنتز عندما تكون v صغيرة جداً بالنسبة لـ C أي عندماتؤول β الى الصفر . ويمكن أن نتبين ذلك بسهولة بمجرد تعويض β بصفر في معادلات تحويل لورنتز بأي شكل من أشكالها الواردة آنفاً ، حيث تؤول المعادلات (21) مثلا الى المعادلات (5) .

V — فراغ منكوفسكي رباعي الابعاد :

يتضح من خلال مارأيناه في الفقرات السابقة أن الزمن t في الجملة S والزمن t' في الجملة S' يختلفان وأنهما يلعبان دوراً مشابهاً لدور الاحداثيات .

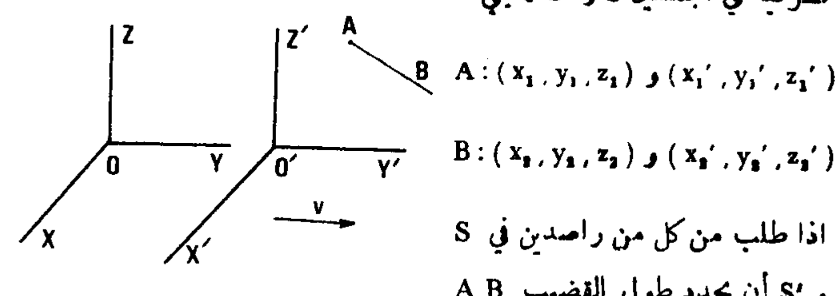
لكن الزمن t هذا ليس من طبيعـــة الاحداثيات من حيث الابعاد . ولو استعملنا المقدار C t في الجملة S والمقدار C t′ في الجملة S′ نلاحظ عندئذ أن هذين المقدارين يلعبان أيضاً دور الاحداثيات ، وخاصة في تحويلات لورنتز . ونلاحظ أيضاً أنهما من طبيعة الاحداثيات نفسها من حيث أنهما يقاسان بالطول ، شأنهما شأن الاحداثيات الديكارتية . ونظراً للترابط بينهما وبين الاحداثيات هذه ولانهما لا يتميزان باستقلال عن الاحداثيات (أي المكان) فان من الطبيعي عندئذ أن نعتبر لكل حادثة فيزيائية مجموعة من الاحداثيات المكانية واحداثي رابع زمني C t في الجملة S ، أو C t′ في الجمله S′ . وبهذا الشكل يكون لاية حادثة فيزيائية أربع احداثيات في أية جملة مقارنة عطالية هي (x , y , z , C t) . وذلك مايفرض علينا أن نعتبر الفراغ ذا أربعة أبعاد وأن نعتبر الموضع مثلا بمتجهة أو شعاع رباعي الأبعاد .

لقد لحا منكوفسكي منحى مشابهاً حيث اعتبر أن الاحداثيات الاربعة لأية حادثة فيزيائيـــة هي (x , y , z , i C t) ، حيث $i = \sqrt{-1}$. والفراغ الذي تمثله هذه الاحداثيات هو عندئذ مانسميه « فراغ منكوفسكي » . وباعتقادنا فان استعمال العدد العقدي i في احداثيات منكوفسكي ليس له مبرر فيزيائي . هذا علاوة على أنه يجعل مصفوفات تحويلات لورنتز عقدية بدلا من أن تكون حقيقية . وعلى الرغم من هذا الفارق بين اعتبـــارات منكوفسكي والفراغ الذي اقترحناه في هذه الفقرة فاننا سنطلق على فراغنا هذا اسم « فراغ منكوفسكي » أيضاً .

VI — تقاصر الطول :

ان علاقات تحويلات لورنتز (21) التي تربط الاحداثيات الاربعة في فراغ منكوفسكي في كل من الجملتين S و S′ توحي الينا بأنه اذا قيس طول ما في الجملتين فان نتيجتي القياس متباينتان . ولبيان صحة ذلك نعتبر قضيباً A B

كما في الشكل (3)، ثابتاً في الجملة
S′ . ولتكن الاحداثيات المكانية
لطرفيه في الجملتين S و S′ كما يلي :



$A : (x_1, y_1, z_1)$ و (x_1', y_1', z_1')

$B : (x_2, y_2, z_2)$ و (x_2', y_2', z_2')

الشكل (3)

اذا طلب من كل من راصدين في S
و S′ أن يحدد طول القضيب A B
فانه يقيس الاحداثيات المكانيـــة
لطرفيه في آن واحد . ونقول عن
حادثتي قياس احداثيات A و B عندئذ أنهما حادثتان متزامنتان . ثم يحسب مركبات طول القضيب على المحاور الثلاثة :

$$\left.\begin{aligned} X &= x_2 - x_1 \quad , \quad Y = y_2 - y_1 \quad , \quad Z = z_2 - z_1 \\ X' &= x_2' - x_1' \quad , \quad Y' = y_2' - y_1' \quad , \quad Z' = z_2' - z_1' \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

وللربط بين هذه القياسات نستعمل علاقـــات لورنتز (21) في العلاقات الاخيرة حيث نجد :

$$X = X' \quad , \quad Y = Y' \quad , \quad Z = Z' . \sqrt{1 - \beta^2} \qquad (31)$$

ويتضح من (31) أن الاطوال المتعامدة مع حركة احدى الجملتين بالنسبة للاخرى لها قياس واحد في الجملتين في حين أن الاطوال الموازية لهذه الحركة تتميز بقياسين مختلفين في هاتين الجملتين . ونلاحظ بصورة خاصة أن القياس في الجملة S أصغر منه في الجملة S′ .

اذا أدركنا أن القياس في الجملة 'S هو قياس سكوني لأن A B ساكن بالنسبة لها ، وأن القياس في S هو قياس حركي لأن A B متحرك بالنسبة لها فاننا نحكم عندئذ أن الحركة لاتؤثر على قياس الاطوال المتعامدة معها في حين أنها تؤثر على قياس الاطوال الموازية لها . وتبين العلاقة الثالثة من (31) أن القياس الحركي Z أصغر من القياس السكوني 'Z . ونعبر عن ذلك بالقول بأن الطول « يتقاصر » بسبب الحركة . ونكتب :

$$L_{motion} < L_{rest} = L_{motion} \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \qquad (32)$$

كمثال على ذلك لنعتبر مركبة فضائية تبتعد عن الارض بسرعة ثابتة $v = \sqrt{0{,}19}\ C$. فاذا قاس ملاح في المركبة طول قلم الرصاص الذي في يده ووجد أنه يساوي 25 cm واذا قاس مراقب على الارض طول قلم الرصاص الذي في يد الملاح لوجد أنه يساوي

$$L = 25\sqrt{1 - 0{,}19} = 25\sqrt{0{,}81} = 22{,}5\ \text{cm}$$

ولو تخيلنا أن المركبة تسير بسرعة الضوء ، وهذا مستحيل طبقاً ، لكان عندئذ $\beta = v/C = 1$ ولوجد المراقب على الأرض أن طول قلم الملاح :

$$L = 25\sqrt{1 - 1} = 0$$

VII – تطاول الزمن :

نعرف الفترة الزمنية ، كالمعتاد ، بأنها المجال الزمني الذي يفصل بين لحظتي وقوع حادثتين . واذا وقعت الحادثتان في مكان واحد قلنا عنهما انهما « متماكنتان » . فالتماكن اذن هو وقوع حادثتين مختلفتين في مكان واحد دون أن يقعا بالضرورة في زمن واحد . بينما رأينا أن « التزامن » هو وقوع

حادثتين في زمن واحد دون أن يقعا بالضرورة في مكان واحد. أما اذا وقعت حادثتان في مكان واحـــد وزمن واحد قلنا عنهما انهما « متطابقتان » .

لنفرض الان أن t_1 و t_2 هما لحظتا (أي زمنـا) وقوع الحادثتين A_1 و A_2 بالنسبة للجملة S وأن t_1' و t_2' هما زمنا وقوع هاتين الحادثتين بالنسبة للجملة S′ . وتكون عندئذ الفترتان الزمنيتان الفاصلتان بين الحادثتين بالنسبـــة للجملتين هما بالترتيب :

$$T = t_2 - t_1 \quad و \quad T' = t_2' - t_1' \qquad (33)$$

ولنفرض فوق ذلك أن الحادثتين متماكنتان في الجملة S′ . فهما غير متماكنتين بالضرورة في الجملة S . ونعبر عن ذلك بأن نكتب الاحداثيات المكانية لهما في الجملتين كما يلي :

$$A_1 (x_1' , y_1' , z_1') \quad , \quad A_2 (x_2' = x_1' , y_2' = y_1' , z_2' = z_1')$$

$$A_1 (x_1 , y_1 , z_1) \quad , \quad A_2 (x_2 , y_2 , z_2)$$

ونذكر هنا من جديد أن الزمن ليس مستقلا عن المكان كما كان الامر في تحويل غاليليه بل مرتبط به ارتباطاً وثيقـــاً عن طريق تحويلات لورنتز . فاذا استعملنا هذه التحويلات المعطاة بالعلاقات (21) في العلاقتين (33) وقارنا الناتجين نجد أن :

$$T = T' / \sqrt{1 - \beta^2} > T' \qquad (34)$$

وفي هذه العلاقة تكمن نتيجة هامة ، وهي أن القيـــاس الحركي T للفترة الزمنية بين الحادثتين أكبر من القياس السكوني T′ لهذه الفترة . ويتضح هذا التمييز اذا اعتبرنا أن الحادثتين تقعان في مكان ثابت بالنسبة للجملة S′ بينما

مكان الحادثتين متحرك بالنسبة للجملة S . ونعبر عن هذه الظاهرة بقولنا ان الزمن « يتطاول » بسبب الحركة . ونكتب :

$$T_{motion} > T_{rest} = T_{motion} / \sqrt{1-\beta^2} \qquad (35)$$

كمثال على ذلك لنعتبر من جديد المركبة الفضائية التي تبتعد عن الارض بالسرعة الثابتة $v = \sqrt{0,19}\ C$ ولنفرض أن ملاحها أطلق اشارتين ضوئيتين بفاصل زمني قدره $T' = 25$ sec حسب ميقاتيته . فاذا قاس راصد على الارض لحظتي وصول الاشارتين اليه وحسب الفاصل الزمني بينهما ، حسب ميقاتيته هو وليس حسب ميقاتية الملاح ، لوجد أنه يساوي :

$$T = 25 / \sqrt{1 - 0,19} = 27,78 \ \text{sec}$$

VIII – تحويلات لورنتز للسرع :

رأينا أن تحويلات لورنتز الاساسية تربط المكان والزمان في جملة عطالية S بالمكان والزمان في جملة عطالية أخرى S′ حين تتحرك احداهما بالنسبة للاخرى حركة مستقيمة منتظمة بسرعة ثابتة v . ورأينا أن لهذه التحويلات انعكاساً مباشراً على قياس المكان والزمان في الجملتين . وسنرى الان أن هذه التحويلات تؤثر أيضاً في قياس السرع في هاتين الجملتين ، وسنجد الروابط بين قياس السرع فيهما. فاذا كانت مركبات سرعة المتحرك في الجملة S كما يقيسها راصد فيها هي :

$$V_x = \frac{dx}{dt} \quad , \quad V_y = \frac{dy}{dt} \quad , \quad V_z = \frac{dz}{dt} \qquad (36)$$

فان الراصد في الجملة S′ يقيس مركبات السرعة التالية :

$$V'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} \quad , \quad V'_{y'} = \frac{dy'}{dt'} \quad , \quad V'_{z'} = \frac{dz}{dt'} \qquad (37)$$

فاذا اشتققنا علاقات تحويل لورنتز واستعملنا (36) و (37) فاننا نجد :

$$V'_{x'} = \frac{V_x \sqrt{1-\beta^2}}{1 - V_z v / C^2}$$

$$V'_{y'} = \frac{V_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - V_z v / C^2} \qquad (38)$$

$$V'_{z'} = \frac{V_z - v}{1 - V_z v / C^2}$$

وتسمى هذه العلاقات بتحويلات لورنتز للسرع .

IX – انسجام تحويلات لورنتز مع تحويلات غاليليه ومع مبدأ آنشتاين :

عندما تكون سرعة الجملة v صغيرة بالنسبة لسرعـــة الضوء تصبح β قريبة من الصفر وكذلك v / C^2 . واستخـــدام ذلك في (38) يؤدي الى النتيجة التالية :

$$V'_{x'} = V_x \quad , \quad V'_{y'} = V_y \quad , \quad V'_{z'} = V_z - v$$

وهذا ما ينسجم تماماً مع ما وجدناه من أجل السرع في التحويلات الغاليلية التي تمثلها العلاقة (3) .

لنفرض الان أن المتحرك هو موجة ضوئية . عندئذ تكون :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = C \qquad (39)$$

فاذا ربعنا العلاقات (38) وجمعناها طرفاً الى طرف وأصلحنـــا الطرفين الناتجين للعلاقة الجديدة مستعملين (39) فاننا نجد عندئذ أن :

$$V' = C$$

أي أن سرعة الضوء في الجملة S′ هي أيضاً C . ومعنى ذلك أن قياس سرعة الضوء في الجملتين واحد مهما كانت سرعة إحداهما بالنسبة للاخرى . أي أن لسرعة الضوء قياساً كونياً ثابتاً . وهذا هو مضمون مبدأ آنشتاين . فتحويلات لورنتز للسرع منسجمة اذن مع هذا المبدأ .

X – تحويلات لورنتز للتسارعات :

ليكن تسارع المتحرك في كل من الجملتين S و S′ معطى بمركباته على محاورها . أي :

$$a_x = \frac{d\,V_x}{d\,t} \quad , \quad a_y = \frac{d\,V_y}{d\,t} \quad , \quad a_z = \frac{d\,V_z}{d\,t} \qquad (40)$$

$$a'_{x'} = \frac{d\,V'_{x'}}{d\,t'} \quad , \quad a'_{y'} = \frac{d\,V'_{y'}}{d\,t'} \quad , \quad a'_{z'} = \frac{d\,V'_{z'}}{d\,t'} \qquad (41)$$

فاذا اشتققنا المعادلات (38) واستعملنا العلاقات (40) و (41) حصلنا على العلاقات التالية :

$$\left.\begin{aligned}
a'_{x'} &= \frac{1-\beta^2}{\left(1-\frac{v}{C^2}V_z\right)^2}\left[\left(1-\frac{v}{C^2}V_z\right)a_x + \frac{v}{C^2}V_x a_z\right] \\
a'_{y'} &= \frac{1-\beta^2}{\left(1-\frac{v}{C^2}V_z\right)^2}\left[\left(1-\frac{v}{C^2}V_z\right)a_y + \frac{v}{C^2}V_y a_z\right] \\
a'_{z'} &= \frac{1-\beta^2}{\left(1-\frac{v}{C^2}V_z\right)^2}\sqrt{1-\beta^2}\;a_z
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

وهذه العلاقات هي ما نسميه بتحويلات لورنتز للتسارعات . وهي تربط بين مركبات التسارع في احدى الجملتين بمركباته ومركبات السرع في الجملة الاخرى .

لكي ندرك تأثير النسبية على التسارعات بشكل أوضح لنفترض حالة خاصة ولننظر في التسارعات في لحظة ما يكون فيها المتحرك ساكناً في الجملة S' التي تتحرك بسرعة v بالنسبة الى الجملة S حركة مستقيمة منتظمة وفق المحورين المنزلقين $o\,z$ و $o\,z'$. عندئذ يكون :

$$V_x = 0 \quad , \quad V_y = 0 \quad , \quad V_z = C$$

$$V'_{x'} = 0 \quad , \quad V'_{y'} = 0 \quad , \quad V'_{z'} = 0$$

وتؤدي علاقات تحويل التسارعات (42) الى الشكل :

$$\left.\begin{aligned} a'_{x'} &= a_x / (1 - \beta^2) \\ a'_{y'} &= a_y / (1 - \beta^2) \\ a'_{z'} &= a_z / (1 - \beta^2) \cdot \sqrt{-\beta^2} \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

فعندما ننتقل من الجملة S الى الجملة S' فان التسارع كله بجميع مركباته يضرب بالعامل $1 / (1 - \beta^2)$. وهذا يزيد قياس التسارع في S' عنه في S . وينسجم ذلك مع فكرة تقاصر الطول . كما أن مركبة التسارع الموازية لحركة الجملة S' تضرب بعامل آخر هو $1 / \sqrt{1 - \beta^2}$. وهذا ماينسجم مع فكرة تطاول الزمن .

ولكي نوضح هذه الفكرة سنطلق رموزاً مناسبة على بعض المقادير التي لها علاقة بالتسارعات . فليكن :

$$d^2 z = Z \quad , \quad (dt)^2 = T^2$$

$$d^2 z' = Z' \quad , \quad (dt')^2 = T'^2$$

فيكون :

$$a_z = \frac{d^2 z}{d t^2} = \frac{Z}{T^2} \qquad a'_z = \frac{d^2 z'}{d t'^2} = \frac{Z'}{T'^2} \qquad (44)$$

ولكننا ، حسب الملاقتين (31) و (34) ، نرى أن :

$$Z' = Z / \sqrt{1 - \beta^2} \qquad T' = T \sqrt{1 - \beta^2} \qquad (45)$$

وبالتعويض من (45) في (44) ينتج :

$$a'_{z'} = \frac{Z / \sqrt{1 - \beta^2}}{T^2 (1 - \beta^2)} = a_z / (1 - \beta^2) \sqrt{1 - \beta^2} \qquad (46)$$

وهذا مايتفق مع ماوجدناه في (43) .

كذلك نلاحظ من (43) أن شعـــاع التسارع في S' أقرب الى المحور الموازي لحركة الجملة منه في حالة الجملة S وكلما ازدادت β ازداد هـــذا الاقتراب . وعندما تصبح β = 1 يصبح التسارع موازياً تماماً لسرعة حركة الجملة S' ، أي أنه ينطبق على اتجاه الحركة وتصبح قيمته غير محدودة . أي :

$$\lim_{v \to C} a = \infty$$

XI — انسجام تحويلات لورنتز للتسارعات مع تحويلات غاليليه ومبدأ آنشتاين :

عندما تكون السرعة v صغيرة أمام سرعة الضوء تؤول الملاقات (42) الى مايلي :

$$a'_{x'} = a_x \quad , \quad a'_{y'} = a_y \quad , \quad a'_{z'} = a_z$$

وهذا هو تحويل غاليليه للسرع . انظر العلاقة (4). ويدل هذا على انسجام تحويلات لورنتز التسارعات مع تحويلات غاليليه .

من جهة أخرى ، اذا كان المتحرك موجة ضوئية فان سرعتها C ثابتة في الجملة S وبالتالي فتسارعها فيها معدوم . أي :

$$a_x = a_y = a_z = 0$$

واستعمال هذه النتيجة في تحويلات لورنتز للتسارعات يؤدي الى أن :

$$a'_{x'} = a'_{y'} = a'_{z'} = 0$$

وتعني هذه النتيجة أن للضوء سرعة ثابتة في الجملة 'S أيضاً . وهذا مايؤكد انسجام تحويلات لورنتز للتسارعات مع مبدأ آنشتاين .

XII — التحريك النسبوي :

لقد رأينا أن نظرية النسبية تؤكد على عدم انفصال الزمان عن المكان وأن موضع المتحرك في فراغ منكوفسكي أو « الفراغ العالمي » يتحدد باحداثيات مكانية — زمانية . وتبين هذه النظرية بصورة خاصة أن أياً من الزمان أو المكان ليس « وحدانياً » كما كان الحال في الميكانيك التقليدي حيث يعتبر الزمان « وحدانياً » أي هو نفسه بالنسبة لجميع جمل المقارنة المطالية . اذن هنا في نظرية النسبية لا يحافظ التغير الزماني d t على قيمته لدى الانتقال من جملة الى أخرى . أما المقدار الذي يحافظ على قيمته والذي له طبيعة الزمن فهو d u المعطى بالعلاقة :

$$d u^2 = d t^2 - \frac{1}{C^2} \vec{dr}^2 \qquad (47)$$

بحيث نستطيع أن نكتب نتيجة لتحويلات لورنتز :

$$d t^2 - \frac{1}{C^2} \vec{dr}^2 = d t'^2 - \frac{1}{C^2} \vec{dr'}^2 \qquad (48)$$

أو :

$$d u^2 = d u'^2$$

وخلاصة القول هنا أن المقدار $d u$ هو « وحداني » ومن طبيعة الزمن . ان موضع أي جسم يتعين في جملة ما S بموضعه المكاني $\vec{r}$ وموضعه الزماني $c t$، أو باختصار فانه يتعين باحداثياته المكانية – الزمانية ($\vec{r}, c t$) . وفي موضع مجاور ناتج عن التغيرات $d \vec{r}$ و $c d t$ في الاحداثيات النسبوية (أي المكانية – الزمانية) تصبح احداثياته [$\vec{r} + d\vec{r}, c (t + d t)$] وماقيل في الجملة S يقال في الجملة 'S مع ملاحظة وجود الفتحات على الاحداثيات فيها .

كنا في الميكانيك التقليدي قد عرفنا السرعة بأنها مشتق الموضع بالنسبة لمتحول وحداني هو الزمن. وعلى غرار ذلك سنعرف السرعة في نطاق نظرية النسبية بأنها مشتق الموضع بالنسبة المتحول الوحداني الزمني $d u$ لكن الموضع هناله شق مكاني وآخر زماني وللسرعة بالتالي مركبتان مكانية وزمانية هما:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{d u}, \frac{d c t}{d u} \right) \quad \text{أو} \quad \left(\frac{d\vec{r}}{d u}, \frac{d t}{d u} \right) \qquad (49)$$

ونسمي هذه السرعة بالسرعة « المطلقة » .

وللسبب نفسه وبالاسلوب نفسه يكون للتسارع مركبتان مكانية وزمانية ويعطى بالعبارة :

$$\left(\frac{d^2 \vec{r}}{d u^2}, \frac{d^2 t}{d u^2}\right) \qquad (50)$$

ويسمى بالتسارع « المطلق » .

لكي نضع قانون التحريك النسبوي نذكر أولا أن قانون نيوتن في التحريك التقليدي نص على أن جداء كتلة الجسم المتحرك في تسارعه يساوي القوة المؤثرة عليه . ونذكر أيضاً أن الكتلة في قانون نيوتن التقليدي هذا هو مقدار ثابت لاعلاقة له بالحركة فهي اذن ما نسميه بالكتلة السكونية m_0 المميزة للجسم في حالة سكونه . ولما كان للتسارع شقان مكاني وزماني فسيكون لقانون التحريك شقان أيضاً أحدهما يربط بين التسارع المكاني ومقدار ما مرتبط بالقوة والاخر يربط بين التسارع الزماني ومقدار آخر له علاقة بالقوة . وسنحدد هذين المقدارين فيما بعد . اذن نكتب :

$$m_0 \frac{d^2 \vec{r}}{d u^2} = \vec{R} \quad \text{و} \quad m_0 \frac{d^2 t}{d u^2} = T \qquad (51)$$

حيث تمثل m_0 الكتلة السكونية للجسم وحيث (T و $\vec{R}$) شعاع في المكان ـ الزمان ونسميه « القوة المطلقة » . وبهذا الشكل يمكن التعبير عن قانون التحريك (51) بالقول : « ان جداء كتلة المتحرك السكونية بتسارعه المطلق يساوي القوة المطلقة المؤثرة عليه .

ولعل هذا القانون بحاجة الى بعض التعديلات التي لاتغير محتواه وانما تغير شكله بحيث يصبح أكثر صلاحاً للاستعمال والتطبيق . نلاحظ أولا أن العلاقة (47) تعطي :

$$\left(\frac{d u}{d t}\right)^2 = 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d r}{d t}\right)^2 = 1 - \frac{u^2}{c^2}$$

أي :

$$\frac{d\,u}{d\,t} = \sqrt{1-\beta^2} = \alpha \qquad (52)$$

واذا طبقنا قاعدة الاشتقاق :

$$\frac{d\,A}{d\,u} = \frac{d\,A}{d\,t} \cdot \frac{d\,t}{d\,u} = \frac{d\,A}{d\,t} \cdot \frac{1}{\alpha} \qquad (53)$$

على المعادلة اليسرى من (51) فانها تأخذ الشكل التالي .

$$\frac{m_0}{\alpha} \cdot \frac{d\,\vec{v}}{d\,t} = \alpha\,\vec{R} \qquad (54)$$

وهنا نعرف المقادير التالية :

(55) الكتلة النسبوية $m = m_0 / \alpha = m_0 / \sqrt{1-\beta^2}$

(56) القوة النسبوية $\vec{F} = \alpha\,\vec{R}$

(57) الاندفاع النسبوي $\vec{P} = m\,\vec{v}$

(58) الطاقة النسبوية $E = m\,C^2$

وبادخال هذه المقادير في العلاقة (54) فان هذه الاخيرة تصبح كما يلي :

$$\frac{d\,\vec{P}}{d\,t} = \frac{d\,(m\,\vec{v})}{d\,t} = \vec{F} \qquad (59)$$

وتعني هذه العلاقة أن مشتق الاندفاع النسبوي بالنسبة للزمن يساوي القوة النسبوية فهذا القانون مشابه لنظيره في الميكانيك التقليدي ، أي قانون نيوتن ، مع فارق أساسي هو استعمال صفة النسبوية مع كل من الاندفاع والقوة في القانون (59) .

ومما يلفت النظر أيضاً أن الكتلة النسبوية m المستحدمة في هذا القانون ليست ثابتة وانما ترتبط بسرعة الجسم عن طريق العلاقة (55) التي يتضح منها أن هذه الكتلة تقترب من اللانهاية في قيمتها كلما اقتربت السرعة v من سرعة الضوء C ·

لننتقل الان الى دراسة المعادلة اليمنى من (51) بغية أن نتبين المعنى الفيزيائي الذي تتضمنه والذي لايتضح في شكلها الحالي . فاذا استعملناقاعدة الاشتقاق (53) فيها فانها تأخذ الشكل :

$$\frac{d\,m}{d\,t} = \alpha T \qquad (60)$$

حيث استعملنا أيضاً علاقة الكتلة النسبوية (55) . واذا ضربنا طرفي العلاقة (60) بـ C^2 فانها تغدو على النحو التالي :

$$\frac{d\,(m\,C^2)}{d\,t} = \alpha\,T\,C^2 \qquad (61)$$

سنعود الى هذه العلاقة بعد أن نحسب الطرف الثاني منطلقين من المعادلة (47) التي نكتبها على الشكل :

$$\left(\frac{d\,t}{d\,u}\right)^2 - \frac{1}{C^2}\left(\frac{d\,\vec{r}}{d\,u}\right)^2 = 1 \qquad (62)$$

فاذا اشتققنا هذه المعادلة بالنسبة لـ u وجدنا :

$$\frac{d^2 t}{d\,u^2}\frac{d\,t}{d\,u} - \frac{1}{C^2}\frac{d^2 \vec{r}}{d\,u^2}\cdot\frac{d\,\vec{r}}{d\,u} = 0 \qquad (63)$$

وبتعويض المشتقين من المرتبة الثانية والذين يظهران في هذه العلاقة الاخيرة بقيمتيهما من العلاقتين الاساسيتين (51) ينتج لدينا ما يلي :

$$\frac{T}{m_0}\frac{dt}{du} - \frac{1}{C^2}\frac{\vec{R}}{m_0} \cdot \frac{d\vec{r}}{du} = 0 \qquad (64)$$

أو :

$$\frac{T}{m_0}\frac{dt}{du} - \frac{1}{C^2}\frac{\vec{R}}{m_0} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{du} = 0$$

أو بالاختصار :

$$T C^2 = \vec{R} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{F}}{\alpha} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (65)$$

وذلك بعد أن استعملنا العلاقة (56) .

ان دمج العلاقتين (61) و (65) يقود الى العلاقة المنشودة وهي :

$$\frac{d(m C^2)}{dt} = \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

أو :

$$dE = \vec{F} . d\vec{r} \qquad (66)$$

ومضمون هذه العلاقة هو أن تغير الطاقة النسبوية (الكلية) يساوي العمل الذي تقوم به القوة النسبوية . وهذا مشابه لما هو قائم في النظرية التقليدية التي ينص فيها على أن تغير الطاقة الكلية يساوي عمل القوة .

ومن المهم جداً أن نركز اهتمامنا على قانوني التحريك النسبوي (59) و (66) وأن نلاحظ أن القانونين المقابلين في الميكانيك التقليدي مشابهان لهما من جهة وينسجمان (لايتعارضان) معهما من أجل السرع الصغيرة . كما

يجدر أن نلاحظ أن قوانين التحريك النسبوي تحقق مبـــدأ التكافؤ الذي ينص على أن قوانين الفيزياء واحدة بالنسبة لجميع الجمل العطالية .

بقي لنا أن نتعرض الى مفهوم الطاقة الحركية . ولهـــذا الغرض نركز تفكيرنا حول مفهوم الطاقة الكلية :

$$E = m C^2 \qquad (67)$$

ولما كانت C ثابتة لا تتغير فان أي تغير في m يتبعـــه تغير في E والعكس صحيح . فاذا اعتبرنا حالة السكون كان لدينا :

$$E_0 = m_0 C^2 \qquad (68)$$

وهذا يعني أن الطاقة الكلية E_0 للكتلة الساكنة هي جداء الكتلة الساكنة في مربع سرعة الضوء . فاذا تحركت هذه الكتلة اختلفت قيمتهـا ، حيث أصبحت تعطى بالعلاقة (67) . ونستنتج من ذلك أن الحركة هي السبب في ازدياد الطاقة من E_0 الى E . والفرق بينهما هو الذي ندعوه بالطاقـــة الحركية ، أي :

$$E_k = E - E_0 \qquad (69)$$

فاذا استعملنا العلاقات (67) و (68) و (55) في العلاقة (69) فاننا نجد عندئذ أن الطاقة الحركية تعطى بالعلاقة :

$$E_k = m_0 C^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \qquad (70)$$

وهذه العلاقة لاتتعارض مع ما ألفناه في الميكانيك التقليدي من أن الطاقة

الحركية تعطى بنصف جداء الكتلة في مربع السرعة . ويمكننا أن نتبين ذلك بسهولة اذا أدركنا أن β صغيرة جـــداً في حالة جواز استعمال الميكانيك التقليدي . فاذا أخذنا ذلك بعين الاعتبار ونشرنا الكسر الظاهر في (70) وجدنا :

$$E_k = m_0 C^2 (1 + \frac{1}{2} \beta^2 + ... - 1)$$

$$= m_0 C^2 (\frac{1}{2} \beta^2 + ...)$$

وبأخذ التقريب من الدرجة الاولى نجد :

$$E_k \simeq \frac{1}{2} m_0 v^2 \qquad (71)$$

وذلك ما اعتمدنا عليه في ميكانيك نيوتن .

وخلاصة القول هي أننا وضعنا قوانين التحريك في الميكانيك النسبوي ورأينا أنها متكافئة في الجمل العطالية وأنها تقبل قوانين نيوتن كتقريب لها في حالة السرع الصغيرة أمام سرعة الضوء .

المسائل

مسائل الفصل الاول

المسألة (I - 1) :

يتحرك جسيم بسرعة ابتدائية قدرها 3 m / sec وبتسارع ثابت قدره $4\ m/sec^2$ في اتجاه السرعة نفسها . .

1) ما هي سرعة الجسيم بعد 7 sec وما هي المسافة التي قطعها ؟

2) أعد الحل إذا كان التسارع يعاكس السرعة .

3) اكتب بصورة عامة عبارة المسافة المقطوعة x بدلالة الزمن t .

المسألة (I - 2) :

تنطلق سيارة من وضع السكون وتصل سرعتها 60 كيلومتراً في الساعة بعد 15 ثانية « افترض أن تسارعها ثابت واحسب قيمته » .

احسب الزمن الذي تستغرقه حتى تصبح سرعتها 80 كيلو متراً في الساعة . ما هي المسافة التي تكون السيارة قد قطعتها عندئذ ؟

المسألة (I - 3) :

تتحرك سيارة على طريق مستقيم ox حركة متسارعة بانتظام . في اللحظة t_1 كانت في الموضع x_1 وفي اللحظة t_2 كانت في الموضع x_2 . بين ان تسارعها يعطى بالعلاقة :

$$a = \frac{2\,(x_2 t_1 - x_1 t_2)}{t_1\, t_2\,(t_2 - t_1)}$$

المسألة (I - 4) :

تتحرك قاطرة من وضع السكون بتسارع ثابت قدره 4 m/sec ولمدة

4 ثوان . عندئذ تتابع سيرها لمدة عشر ثوان أخرى بحركة منتظمة . ثم بعد ذلك تطبق كوابح القاطرة (الفرامل) مسببة تباطؤاً منتظماً قدره $8\ m/sec^2$ حتى تقف .

1) ارسم منحنياً بيانياً للسرعة بدلالة الزمن .

2) بين أن السطح المحصور بين المنحني ومحور الزمن يقيس المسافة المقطوعة .

المسألة (I - 5) :

تتحرك سيارتان A , B باتجاه واحد بسرعتين V_A و V_B بالترتيب . وعندما تكون السيارة A خلف السيارة B بمسافة قدرها x تطبق السيارة الخلفية A كوابحها مسببة تباطؤاً قدره a . بين أنه حتى يحصل اصطدام بين السيارتين يجب أن يكون :

$$V_A - V_B > \sqrt{2ax}$$

المسألة (I - 6) :

يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة :

$$x = 16t - 6t^2$$

حيث x المسافة المقطوعة مقدرة بالأمتار و t الزمن مقدر بالثواني .

1) أوجد موضع الجسم في اللحظة $t = 1\ sec$.

2) في أية لحظة (او لحظات) يمر الجسم من المبدأ ؟

3) احسب السرعة الوسطى خلال الفترة الزمنية $o < t < 2\ sec$.

4) أوجد العبارة العامة للسرعة الوسطى في المجال $t_o < t < t_o + \Delta t$.

5) احسب السرعة الآنية في كل من اللحظتين $t = o$ و $t = 1$.

6) أوجد المواضع التي يكون فيها الجسم ساكناً والأزمنة المرافقة لذلك .

7) أوجد العبارة العامة للتسارع الوسطي بين اللحظتين t_0 , $t_0 + \Delta t$.

8) أوجد العبارة العامة للتسارع الآني في أية لحظة t .

9) متى ينعدم التسارع الآني ؟

10) ارسم على جملة محورين مستويين كلاً من x , v , a بدلالة t .

المسألة (I - 7) :

يعطى موضع جسيم متحرك في مستو بدلالة الزمن بالعلاقتين :

$$x = A \sin \omega t \qquad y = \cos \omega t$$

1) أوجد السرعة والتسارع في اللحظة t .

2) مثل على جملة محورين متعامدين كلاً من المسار وشعاعي السرعة والتسارع . واحسب التسارعين الناظمي والمماسي .

المسألة (I - 8) :

يتحرك جسيم كتلته m حسب القانون التالي :

$$x'' = \frac{3}{m} \quad و \quad y'' = \frac{1}{m}$$

1) عين القوة المؤثرة على الجسيم .

2) عين سرعة الجسيم ومساره .

3) احسب اندفاعه الزاوي وعزم القوة المؤثرة عليه .

4) بين أن عزم القوة يساوي مشتق الاندفاع الزاوي بالنسبة للزمن .

5) احسب العمل الذي تقوم به القوة المطبقة على الجسيم بين اللحظتين $t = 1$ و $t = 5$.

6) احسب دفع القوة بين هاتين اللحظتين .

7) احسب تغير الاندفـاع الخطي بين هاتين اللحظتين . قارن مـع نتيجة الطلب السادس .

8) احسب تغير الطاقة الحركية بين اللحظتين المذكورتين وقارن النتيجة بما حصلت عليه في الطلب الخامس .

افرض في كل ما سبق أن الجسيم بدأ حركته من المبدأ بدون سرعة ابتدائية .

* * *

مسائل الفصل الثاني

المسألة (II - 1) :

لاعب كرة يضرب كرته فتنطلق بسرعة قدرها 15 m/sec وبزاوية قدرها °30 مع الأفق . ولاعب كرة آخر يقف على مسافة 50 m من اللاعب الأول وفي نفس المستوي الشاقولي الذي يحوي مسار الكرة . في لحظة انطلاق الكرة بدأ اللاعب الثاني يجري باتجاهها .

1) احسب الحد الأدنى لسرعة اللاعب الثاني ليتمكن من الوصول إلى موضع سقوط الكرة على الأرض قبل ان تصله هي .

2) لاعب آخر من الفريق المضاد كان الى جانب الثاني في لحظة ضرب الكرة من قبل اللاعب الأول يجري بنفس اللحظة لكي يسبق الثاني ويتلقى الكرة برأسه وهي على ارتفاع مترين عن سطح الأرض . احسب سرعته اللازمة لذلك . افرض في كل ذلك أن كلاً من اللاعبين يجري بسرعة ثابتة .

3) عين موضع التقاء اللاعب الأخير بالكرة .

المسألة (II - 2) :

تحلق قاذفة قنابل أفقياً وعلى ارتفاع 1-2 km بسرعة قدرها 180 km/hr

1) عين المكان الذي تقذف منه الطائرة قنابلها حتى تصيب هدفها . افرض أن الهدف مبدأ لجملة الاحداثيات .

2) عين أيضاً اللحظة الزمنية التي يحصل عندها القذف معتبراً أن مبدأ الزمن يوافق مبدأ الاحداثيات .

3) ما هي سرعة القذيفة عندما تكون على ارتفاع 200 m عن سطح الأرض وعندما تصطدم بالأرض ؟

4) ما هي زاوية سرعة القذيفة عندما تصطدم بالأرض ؟

المسألة (II - 3) :

تنطلق قذيفة من مدفع بزاوية 35° مع الأفق وتصطدم بالأرض بعد أن تقطع مسافة أفقية قدرها 4 km . احسب :

1) سرعتها الابتدائية .

2) زمن الرمي .

3) اقصى ارتفاع تصله القذيفة .

4) سرعتها عند اقصى ارتفاع .

المسألة (II - 4) :

يتمركز مدفع على قمة جبل ارتفاعه 200 m ويقذف قنبلة بسرعة قدرها 400 m/sec وبزاية قدرها 30° فوق الأفق .

1) احسب المدى الأفقي للقذيفة .

2) إذا كانت في السهل سيارة تتجه باتجاه المدفع وبسرعة 100 km/hr وفق مسار أفقي مستقيم واطلق المدفع قنبلة فأصابت السيارة ، على أي بعد كانت السيارة في لحظة الاطلاق ؟

3) أعد حل المسألة عندما تكون زاوية القذف 30° تحت الأفق وتكون السيارة منطلقة بحيث تبتعد عن المدفع .

المسألة (II - 5) :

يقذف مظلي من طائرة تحلق على ارتفاع 3 km وبسرعة قدرها 300km/hr .

ونفرض ان المظلة تفتح فوراً (للتسهيل) . كما نفرض أيضاً أن مقاومة الهواء للمظلة هي :

$$\vec{F}_r = 10\,\vec{v}$$

وأن كتلة المظلي مع مظلته هي 60 kg .

1) اكتب معادلات حركة المظلي .

2) احسب السرعة الحدية للهبوط ولحظة بلوغها ومكانه .

3) احسب لحظة سقوط المظلي على الأرض .

المسالـة (II - 6) :

يتوضع مدفع عند قاعدة سطح جبل ميله $20°$ مع الأفق ويطلق قذيفة بسرعة ابتدائية v_0 تصنع مع الأفق زاوية $40°$. أوجد مدى القذيفـة على السفح ، أي المسافة المقطوعة على السفح المائل .

المسالـة (II - 7) :

تحلق طائرة معادية على ارتفاع h وبسرعة v . وفي اللحظة التي كانت فوق مدفع آلي رابض على الأرض أطلق هذا المدفع قذيفة بسرعة v_0 وزاوية تسديد Θ_0 مع الأفق . عين الحد الأدنى للسرعة v_0 وقيمة زاوية التسديد Θ حتى تصاب الطائرة .

المسالـة (II - 8) :

تطير طائرة على ارتفاع 1 km وبسرعة 200 km/hr . ترمي هذه الطائرة قذيفة بقصد اصابة باخرة تسير بنفس الاتجاه وبسرعة قدرها 20 km/hr . بين انه حتى تصاب الباخرة يجب أن تكون المسافة الأفقية بينها وبين الطائرة

730 m . أعد حل المسألة واحسب المسافة بينهما عندما تكون الباخرة تسير باتجاه معاكس .

المسألة (II - 9) :

بين أنه في الحركة المستوية تحت تأثير قوة ثابتة (وبالتالي تسارع ثابت) تكون العلاقتان التاليتان صحيحتين :

$$v^2 = v_0^2 + 2\,\vec{a}\,.\,(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\vec{r} = \tfrac{1}{2}(\vec{v} + \vec{v}_0)\,t$$

* * *

مسائل الفصل الثالث

المسألة (III - 1) :

يتحرك جسيم كتلته m تحت تأثير القوة المركزية .

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{r_1}$$

حيث $\vec{r_1}$ شعاع الواحدة المحمول على شعاع الموضع ، وحيث مركز القوة ينطبق على مبدأ الاحداثيات O . في لحظة البدء $t_0 = o$ كان الجسيم في الموضع (r_0 , Θ_0) وكانت سرعته $\vec{v_0}$ مماسة لكرة مركزها O .

1) بين أن حركة الجسيم مستوية وخاضعة لقانون السطوح .

2) احسب السرعة السطحية في أية لحظة t بدلالة r_0 ، v_0 ، Θ_0 .

المسألة (III - 2) :

برهن أنه اذا كان الجسيم ذو الكتلة m متحركاً على قطع ناقص تحت تأثير حقل مركزي متناسب عكساً مع مربع البعد .

$$\vec{F} = -\frac{D}{r^2}\,\vec{r_1}$$

فان سرعته تعطى بالملاقة :

$$v^2 = \frac{D}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

حيث D ثابت ، a نصف المحور الكبير للقطع و $\vec{r}$ شعاع موضع الجسيم الذي شعاع واحدته هو $\vec{r_1}$.

المسألة (III - 3) :

برهن باتباع طريقة شعاعية أن مسار كوكب حول شمسه هو قطع ناقص يشكل مركز الشمس أحد محرقيه .

المسألة (III - 4) :

يتحرك جسيم مادي P كتلته m على دائرة نصف قطرها a وتمر من مركز الحقل O الذي يخضع له الجسيم . أوجد عبارة القوة f (r) .

المسألة (III - 5) :

إذا كانت معادلة مسار جسيم في حقل مركزي هي :

$$r = c\sqrt{\cos 2\Theta}$$

حيث r , Θ الاحداثيان القطبيان للجسيم وحيث C ثابت موجب فانه يطلب تعيين عبارة القوة f (r) .

المسألة (III - 6) :

يتحرك الجسيم المادي P ذو الكتلة m في حقل قوى مركزي مركزه O ومعطى بالعلاقة :

$$\vec{F} = \frac{\sin\Theta}{r^2}\vec{r_1}$$

حيث r , Θ الاحداثيان القطبيان للجسيم و $\vec{r_1}$ شعاع واحدة موضعه .

في اللحظة $t = o$ كان الجسيم في الموضع (r_o , Θ_o) وكانت سرعته $\vec{v_o}$ تصنع مع $\vec{r_o}$ زاوية قدرها $2\Theta_o$.

1) استخرج عبارتي السرعة والتسارع في الاحداثيات القطبية .

2) اكتب معادلات الحركة بدلالة الاحداثيين r , Θ والزمن t .

3) بين أن الحركة خاضعة لقانون السطوح واحسب السرعة السطحيــة بدلالة $r_\circ$ ، $\Theta_\circ$ ، $v_\circ$.

* * *

مسائل الفصل الرابع

المسألـة (IV - 1) :

AB قضيب رفيع متجانس طوله $2a$ وكثافته الخطية σ و كتلته m

1) وضعت كتلة m على استقامته وعلى بعد ما من طرفه A . احسب قوة جذب القضيب AB للـكتلة m .

2) اذا كانت m كتلة نقطيـة على بعـد x من الـكتلة m . ما هو البعد x الذي من أجله تكون قوة التجاذب بين m و m مساوية للقوة المحسوبة في الطلب الأول ؟

3) توضع الـكتلة m في موضع P خارج استقامة القضيب وعلى بعد b منه بحيث ترى نهايتاه B , A ضمن زاويتين α , β مع ناظم القضيب المار من P . احسب قوة جذب القضيب لـ m .

4) ناقش الحالات المختلفة للطلب الثالث واستنتج بصورة خاصة حالة قضيب لا متناه في الطول .

المسألـة (IV - 2) :

سلك رفيع متجانس على شكل قوس دائري نصف قطره R ومركزه O وزاويته المركزية Θ . برهن أن قـوة جذب السلك لـكتلة نقطيـة m في المركز O ذات شدة :

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{2\,G m\, m}{R^2}\;\frac{\sin(\Theta/2)}{\Theta}$$

حيث m كتلة السلك . ثم ناقش الحالتين $\Theta = \pi/2$ و $\Theta = \pi$.

المسألة (IV - 3) :

بمقارنة نتائج المسألتين الأخيرتين بين أنه يمكن الاستعاضة عن القضيب AB بقوس له كثافة القضيب ومركزه P ويمس القضيب (أي نصف قطره b) ونهايتاه واقعتان على PA و PB .

المسألة (IV - 4) :

حلقة نصف دائرية مستوية مركزها O ونصفا قطريها الداخلي R_1 والخارجي R_2 وكثافتها السطحية المتجانسة σ .

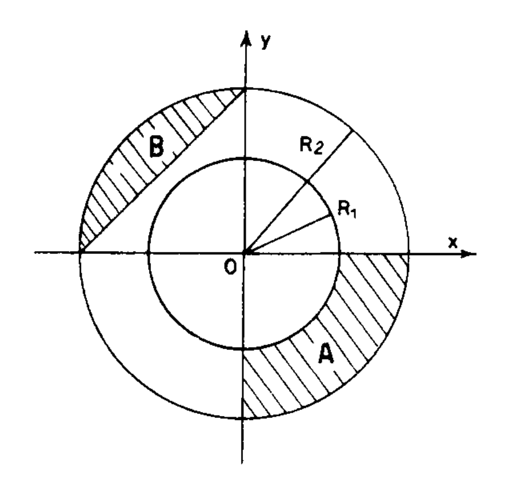
1) أحسب قوة جذب هذه الحلقة لكتلة m في مركزها O .

2) ناقش الحالات المختلفة حسب قيم R_1 , R_2 .

3) أعد الحل إذا استعضنا عن الحلقة بقبة كروية نصفا قطريها R_1 , R_2 وكثافتها الحجمية ϱ .

4) أعد الحل في الحالتين إذا كانت الكثافة متناسبة مع مربع البعد عن O .

المسألة (IV - 5) :



يمثل الشكل المرافق صفيحتين A , B مستويتين ومتجانستين كثافة كل منهما السطحية σ .

1) احسب القوة $\vec{F}_A$ التي تؤثر بها الصفيحة A على الكتلة m الموضوعة في O .

2) احسب كذلك القوة $\vec{F}_B$ التي تؤثر بها الصفيحة B على هذه الكتلة.

3) عين العلاقة بين R_1 , R_2

التي من أجلها تنعدم محصلة القوتين $\vec{F}_A$ و $\vec{F}_B$ على الكتلة m في O .

المسالة (IV - 6) :

1) أحسب قوة الجذب التي تؤثر بها كتلتان متساويتان كل منهما m مفصولتان بمسافة ثابتة 2a على كتلة أخرى $m' = 1\,g$ في موضع ما لا على التعيين .

2) أحسب أيضاً كمون هذه القوة .

3) ادرس تغيرات القوة والكمون وارسم خطوط القوة وسطوح سوية الكمون .

* * *

مسائل الفصل الخامس

المسالــة (V - 1) :

يقذف برتون بطاقة حركية قدرها T_0 ويدخل حقـلاً مغناطيسياً شدة تحريضه B متعامد مع سرعته فيرسم، اعتباراً من نقطة دخوله الحقل مساراً دائرياً نصف قطره R . نضع لوحة تصوير حساسة L عرضها مواز لـ B وطولها متعامد معه. ونضع إلى جانبها بوتقة رصاصية S فيها مادة مشعة ، كما يبين الشكل المجاور . تطلق المادة المشعة صنفين من جسيمات » . الصنف الأول ذو طاقة حركية T_1 والثاني ذو طاقة T_2 ، حيث T_1 و T_2 مجهولتان ، وحيث أن الاتجاه الذي تنطلق به الجسيمات لدى خروجها من البوتقة متعامد مع اللوحة ومع B . وبعد تحميض اللوحـة يلاحظ أثر الجسيمات في المنطقتين المشار إليها على الشكل واللتين تبعدان عن فوهة البوتقة مسافتين X_1 , X_2 على الترتيب . احسب T_1 , T_2 بصورة عامة، ثم قدرهما بالمليون فولط الكتروني علماً بأن :

$$R_0 = 10 \text{ cm}, \quad T_0 = [illegible] \text{ Mev}, \quad X_1 = 15 \text{ cm}, \quad X_2 = 25 \text{ cm}$$

المسالــة (V - 2) :

نستعمل مسرعاً رحوياً (سيكلوترود) نصف قطر رحاه R وشدة التحريض المغناطيسي فيه B ، وشدة الحقل الكهربائي المتناوب بين نصفيه E ، ونود تسريع الالكترونات بواسطة هذا المسرع . فاذا كانت e شحنة

الالكترون و m كتلته و v_0 سرعته الابتدائية فيطلب الاجابة على ما يلي :

1) عين بعد منبع الالكترونات عن المركز الهندسي للمسرع حتى يكون هذا المركز مركزاً للدائرة التي يرسمها الالكترون في نصف دورته الأولى .

2) احسب السرعة الزاوية للالكترون داخل المسرع .

3) احسب دور حركته .

4) عين مقدار الطاقة التي يكتسبها الالكترون في كل مرة يجتاز فيها المسافة X الفاصلة بين نصفي المسرع .

5) عين الطاقة المكتسبة بعد اجتياز المسافة المذكورة n مرة ، واحسب الطاقة الحركية للالكترون عندئذ .

6) احسب مقدار ازدياد مربع نصف قطر مسار الالكترون من جراء اجتيازه للمسافة X .

7) احسب عــدد الدورات التي يدورهـا الالكترون قبل أن يخرج من المسرع .

8) ما هي الطاقة العظمى التي يخرج بها الالكترون من المسرع ؟

9) ما هو الزمن الكلي الذي يقضيه الالكترون في المسرع ؟

* * *

مسائل الفصل السادس

المسألة (VI - 1) :

برهن أن التسارع الزاوي المقيس في الجملة المطالية يساوي التسارع الزاوي المقيس في الجملة اللاعطالية .

المسألة (VI - 2) :

الجملة oxyz لاعطالية تدور بالنسبة إلى الجملة المطالية OXYZ بسرعة زاوية معطاة بشعاع الدوران :

$$\vec{\omega} = 2t\,\vec{i} - t^2\,\vec{j} + (2t + 4)\,\vec{k}$$

حيث t الزمن و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ أشعة واحدة محاور الجملة اللاعطالية . إذا كان شعاع موضع المتحرك بالنسبة لراصد في الجملة اللاعطالية معطى بالعلاقة :

$$\vec{r} = (t^2 + 1)\,\vec{i} - 6t\,\vec{j} + 4t^3\,\vec{k}$$

فاحسب :

1) سرعة المتحرك الظاهرية وسرعته الحقيقية في اللحظة t .

2) تسارع المتحرك الظاهري وتسارعه الحقيقي في اللحظة t .

3) طبق عددياً فيما سبق من أجل t=1 .

المسألة (VI - 3) :

قضيب شاقولي AB يدور حول استقامته الشاقولية بسرعة زاوية ثابتة

ω ، وقد ثبت في نقطة O منه طرف خيط دقيق طوله L مهمل الكتلة وغير قابل للامتطاط . يحمل الخيط في طرفه الآخر كتلة m . احسب قوة شد الخيط T والزاوية Θ التي يصنعها الخيط في حالة استقرار الحركة .

المسألة (VI - 4) :

أنبوب مفرع AOB يدور حول النقطة O منه في مستو شاقولي وبسرعة زاوية ثابتة ω . وتتحرك داخل الأنبوب كرة صغيرة P كتلتها m بدون احتكاك .

1) أدرس حركة هذه الكرة مفترضاً انها نقطة .

2) بين أن الكرة تتحرك تحت شروط معينة (يطلب تعيينها) حركة اهتزازية بسيطة داخل الأنبوب .

3) ماذا يحدث للكرة إذا لم تتحقق تلك الشروط ؟ صف حركتها عندئذ .

المسألة (VI - 5) :

يسقط جسم على الأرض من ارتفاع صغير (بالنسبة لنصف قطرها) وبدون سرعة ابتدائية . نفرض أن الزاوية التي يصنعها المحور المتجه من مركز الأرض نحو مكان السقوط مع محور الأرض المتجه من الجنوب إلى الشمال هي λ . كما نفرض ان سرعة دوران الأرض حول نفسها ثابتة ω .

1) بين ان الجسم بعد مرور زمن t من بدء السقوط يكون قد انحرف عن الشاقول المار من موضع البدء مسافة قدرها $\omega\,(g \sin\lambda)\, t^3/3$ نحو الشرق .

2) بين استناداً إلى هذه النتيجة أن الجسم الساقط من ارتفاع H فوق سطح الأرض يصطدم بها في نقطة تبعد مسافة :

$$(2H\sqrt{2H}\,\omega \sin\lambda)/(3\sqrt{g})$$

إلى الشرق من نقطة تقاطع الشاقول المار من موضع بدء السقوط مع سطح الأرض .

المسألة (VI - 6) :

لنفرض أننا في المكان O من النصف الشمالي للكرة الأرضية وأن شاقول هذا المكان الصاعد يصنع زاوية λ مع محور الأرض SN .

1) في اللحظة $t=o$ يبدأ تيار هوائي بالحركة متجهاً نحو الشمال . بين أن هذا التيار سينحرف عن اتجاه الشمال (اتجاهه الأصلي) وعين الجهة التي ينحرف نحوها (شرقاً أم غرباً) .

2) أعد السؤال إذا كانت جهة التيار الابتدائية نحو الجنوب .

3) كرر السؤال أيضاً في الحالتين التاليتين :

أ) الاتجاه الابتدائي للتيار نحو الشرق .

ب) الاتجاه الابتدائي للتيار نحو الغرب .

وبين في كل من الحالتين أن التيار سينحرف شمالاً او جنوباً وحدد جهة هذا الانحراف .

4) اذا حدث انخفاض جوي في المكان المذكور فان الريح تتجه نحوه من جميع المناطق المجاورة وذات الضغوط الأعلى وتشكل انحصاراً دورانياً في ذلك المكان . هل يمكنك على ضوء ما تقدم أن تفسر الحركة الدورانية للاعصار وأن تحدد جهة دورانه ؟

5) لو حصل الانخفاض الجوي في مكان آخر في النصف الجنوبي للكرة الارضية فما هي جهة دوران الاعصار الناتج ، ولماذا ؟

6) على ضوء النتائج السابقة فقط هل يمكن أن نعتبر المنطقة الاستوائية منطقة تكثر فيها الاعاصير ام العكس ، ولماذا ؟

7) هل تستطيع إعطاء فكرة واضحة عن توزع الرياح عند خط الاستواء والمنطقتين المجاورتين له من الشمال ومن الجنوب ، وذلك على ضوء كل ما تقدم من نتائج في هذه المسألة .

المسألة (VI - 7) :

في مكان ما من نصف الارض الشمالي زاوية ناظمة الصاعد مع محور الارض هي λ . ينساب في هذا المكان باتجاه الشمال نهر عرضه D انسياباً هادئاً .

1) بين ان مستوى الماء عند الضفة اليسرى للنهر أعلى منه عند الضفة اليمنى بالمقدار :

$$d = \frac{2D\omega v_0 \cos \lambda}{\sqrt{g^2 + 4\omega^2 v_0^2 \cos^2 \lambda}}$$

2) بين أن النتيجة السابقة يمكن أن تأخذ شكلاً تقريبياً :

$$d \cong 2\, D\omega v_0 \cos \lambda \,/\, g$$

وعلل سبب ذلك .

3) تطبيق عددي : $\lambda = 45^\circ$, $D = 2km$, $v_0 = 5km/hr$ وبفرض في كل ما تقدم أن g هو التسارع الارضي و ω سرعة دورانها الزاوية و v_0 سرعة ماء النهر في المكان المذكور .

المسألة (VI - 8) :

تطلك قذيفة من طائرة على ارتفاع h من مكان O في النصف الشمالي لكرة الارضية زاوية شاقوله الصاعد مع محور الارض SN هي λ . نفرض أن سرعة القذيفة شاقولية وقدرها v وان سرعة دوران الارض ω ثابتة .

1) بين ان القذيفة بعد مرور فترة زمنية t على لحظة اطلاقها تبتعد عن الشاقول المار من موضع اطلاقها مقدار :

$$d = \frac{1}{6}\,\omega \sin \lambda \left(2gt^3 - 6v_o t - 12\,ht \right)$$

2) بين أن القذيفة تصطدم بالارض في مكان يبعد عن شاقول موضع البدء مسافة قدرها :

$$d_o = \frac{1}{6}\,\omega \sin \lambda \left(\frac{2\,c^3}{g^2} - \frac{6\,v_o c^2}{g^2} - \frac{12\,hc}{g} \right)$$

حيث :

$$C = v_o + \sqrt{v_o^2 + 2\,hg}$$

3) تطبيق عددي :

$$\lambda = 60^\circ \;,\; v_o = 100\ km/hr \;,\; g \simeq 10\ m/sec^2$$

ملاحظة : تهمل في جميع حلول المعادلات التفاضلية المقادير التي تحوي قوى اكبر او تساوي 2 للمقدار ω .

المسألة (VI - 9) :

تطلق قذيفة باتجاه الجنوب من موضع زاوية شاقوله مع محور الارض λ بسرعة ابتدائية v_o تصنع مع الافق الزاوية α . ونفرض ان سرعة دوران الارض حول نفسها ثابتة وتساوي ω .

1) أوجد موضع القذيفة بعد مرور زمن t على لحظة الاطلاق .

2) برهن ان القذيفة تكون قد انحرفت عندئذ مسافة :

$$d = \left(\frac{1}{3}\,\omega g \sin \lambda \right) t^3 - \omega\, v_o \cos \left(\alpha - \lambda \right) t^2$$

اعتباراً من المستوي الشاقولي المار من موضع البدء والحاوي للسرعة الابتدائية .

3) بين ان موضع اصطدام القذيفة بالارض يبعد مسافة قدرها :

$$a = \frac{4\ \omega v_0^3}{3\ g^2} \sin^2\alpha\ (\ 3 \operatorname{Sin}\alpha\ \operatorname{Sin}\lambda\ -\ \cos\alpha\ \cos\lambda\ )$$

وذلك إلى الشرق من موضع سقوطها فيما لو اهملت حركة الارض الدورانية حول نفسها .

مسائل الفصل السابع

المسألة (VII - 1) :

أوجد مركز كتلة الجسم المتجانس المحصور بين المستويات الاحداثية $x = o$ و $y = o$ و $z = o$ والمستوى $x + y + Z = a$.

المسألة (VII - 2) :

أوجد مركز كتلة قبة نصف كروية . متجانسة كتلتها M ونصف قطرها r في الحالتين التاليتين :

1) القبة جوفاء .

2) القبة صماء .

المسألة (VII - 3) :

أوجد مركز كتلة مثلث ABC متجانس كتلته M في الحالات التالية :

1) الكتلة موزعة بانتظام على أضلاعه .

2) الكتلة موزعة بانتظام على سطحه .

المسألة (VII - 4) :

أوجد مركز كتلة صفيحة مستطيلة الشكل AB CD كثافتها السطحية σ متناسبة مع البعد عن أحد العرضين . أعد المسألة إذا كانت الكثافة متناسبة مع كل من البعدين الموازيين للطول والعرض .

المسألة (VII - 5) :

سلك معدني متجانس ثني على شكل قوس دائري مركزه O ونصف قطره R.ويرى من مركز وفق الزاوية θ .

1) عين إحداثيي مركز كتلته على جملة محورين oxy بحيث أن المحور oy يشكل محور تناظر للقوس .

2) ادرس تحولات احداثيي مركز الكتلة x_c و y_c بدلالة الزاوية Θ عندما تتحول هذه الزاوية بين O و π .

3) ارسم منحنياً بيانياً يمثل هذه التحولات .

المسألة (VII - 6)

لدينا n مجموعة من النقاط المادية (الجسيمات) . مراكز كتل هذه المجموعات تتعين بأشعة مواضعها $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ ، . . . ، $\vec{r}_n$. ولتكن كتل هذه المجموعات M_1 ، M_2 ، M_n . إذا شكلنا من هذه المجموعات كلها مجموعة جديدة برهن ان مركز كتلة هذه المجموعة يعطى بشعاع موضعه $\vec{r}_c$ المعطى بالعلاقة :

$$\vec{r}_c = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \vec{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$$

استنتج من ذلك أنه لايجاد مركز كتلة مجموعة مادية يمكن أن تقسم هذه المجموعة إلى مجموعات جزئية ونعين مراكز كتلها ونرفق بكل مركز كتلة المجموعة الجزئية المرافقة ثم نعين مركز كتلة هذه المراكز فيكون الناتج مركز كتلة المجموعة الكلية .

المسألة (VII - 7)

تتألف مجموعة مادية من قرصين دائريين متجانسين مستويين ومتماسين في نقطة من محيط كل منهما . نصف قطر الأولى R_1 ونصف قطر الثانية R_2 . أوجد احداثيي مركز كتلة هذه المجموعة .

(استفد من نتيجة المسألة السابقة في الحل) .

المسألة (VII - 8) :

قرص دائري متجانس نصف قطره R . اقتطمنا منه قرصاً دائرياً آخر نصف قطره r بحيث ان القرص المقتطع يمس القرص المقطوع في نقطة من محيطه . احسب احداثيي مركز القرص المتبقي مستعيناً بمضمون المسألة قبل الأخيرة وبمفهوم استعمال كتلة سالبة .

المسألة (VII - 9) :

جسم صلب مؤلف من اسطوانة دائرية صماء نصف قطرها R وارتفاعها H وقد لصق بها على قاعدتها نصف كرة صماء لها نصف القطر R نفسه .

1) احسب احداثيات مركز الكتلة للجملة الكلية مفترضاً ان الاسطوانة والقبة متجانستان ومتخذاً أحد المحاور الاحداثية محور تناظر للجملة .

2) أعد المسألة إذا كانت كثافة الاسطوانة متناسبة مع البعد عن قاعدتها الملاصقة للقبة .

المسألة (VII - 10) :

يتحرك جسمان ماديان كتلتاهما m_1 , m_2 بحيث تكون سرعتهما النسبية (أي سرعة أحدهما بالنسبة للآخر) هي $\vec{v}$ وسرعة مركز كتلتهما هي $\vec{v}_c$. بين ان الطاقة الحركية الكلية لهما تعطى بالعلاقة التالية :

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v_c^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$$

حيث μ هي الكتلة المختزلة والتي تعطى بالعلاقة :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

المسألة (VII - 11) :

اذا كانت m كتلة القمر و $\vec{\Omega}_m$ اندفاعه الزاوي حول الأرض وكانت

M كتلة الأرض فاحسب الاندفاع الزاوي $\vec{\Omega}$ لمجموعة الأرض والقمر في حركتها حول مركز كتلتيهما C ، وبين أن هذا الاندفاع الزاوي يعطى بالعلاقة :

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_m \frac{M}{m + M}$$

المسألة (VII - 12) :

مجموعة صلبة مؤلفة من اسطوانة صماء نصف قطرها R وارتفاعها H ونصف كرة لها نصف القطر R ذاته وملتصقة بقاعدة الاسطوانة وضعت هذه المجموعة على طرفها الكروي فوق مستو أفقي . عين وضع توازن المجموعة وبين ان شرط استقرار هذا التوازن هو أن تتحقق المتراجحة $R / H > \sqrt{2}$.

المسألة (VII - 13) :

ثبت طرفا سلسلة منتظمة بنقطتين A و B ثابتتين في مستو أفقي واحد . أوجد معادلة الشكل الهندسي الذي تأخذه السلسلة بعد أن تتوازن . أعد الحل مفترضاً أن الكثافة الخطية للسلسلة تتناسب طرداً مع المسافة الأفقية اعتباراً من شاقول التناظر في وضع التوازن .

المسألة (VII - 14) :

لتكن m_1 و m_2 و m_3 كتل ثلاث جسيمات تتحرك بسرع نسبية v_{12} و v_{23} و v_{31} فيما بينها .

1) احسب الطاقة الحركية لمجموعة الجسيمات الثلاث بدلالة كتلها وسرعها النسبية .

2) عمم النتيجة على مجموعة مؤلفة من N جسيم .

المسالة (VII - 15) :

تتحرك الكتلتان m_1 و m_2 على مستويين مائلين متعاكسين زاويتا ميلهما مع الأفق هما Θ_1 و Θ_2 وبدون احتكاك . وترتبط الكتلتان ببعضهما بواسطة خيط عديم الكتلة وعديم الامتطاط ويمر على بكرة صغيرة A عند الفصل المشترك للمستويين المائلين . ونفترض أن البكرة عديمة الكتلة وان حركتها تتم بدون احتكاك .

1) استخدم مبدأ العمل الافتراضي لتبرهن أن شرط التوازن هو :

$$m_1 \sin \Theta_1 = m_2 \sin \Theta_2$$

2) استخدم فكرة الكمون للاجابة على السؤال الأول .

3) استخدم مبدأ دالمبير لدراسة حركة جملة الكتلتين .

المسالة (VII - 16) :

للقضيب AB كتلة M وطول L . تستند نهايته A إلى جدار شاقولي وبدون احتكاك كما ترتبط نهايته B بخيط طوله a ، (a>L) ، مثبت طرفه الآخر بنقطة O ثابتة من الجدار وبحيث يكون مستوى النقطة A تحت مستوى O ويكون مستوى B تحت مستوي A. ولتكن كذلك زاوية الخيط مع الشاقول الهابط هي α وزاوية القضيب مع الشاقول نفسه هي β . برهن ان القضيب يتوازن إذا تحقق الشرطان التاليان :

$$\sin^2\alpha = (4L^2 - a^2) / 3a^2$$
$$\sin^2\beta = (4L^2 - a^2) / 3L^2$$

وذلك بطريقتين :

1) باستعمال مبدأ العمل الافتراضي .

2) باستعمال مفهوم الكمون .

المسالة (VII - 17) :

يطفو زورق على سطح ماء بحيرة ساكنة . ثبت على سطحه مستو مائل

على الأفق بزاوية Θ وطوله L وطرفه المنخفض يلامس الماء . تركت قطعة جليد كبيرة تنزلق على المستوي المائل بدون احتكاك . ونفترض أن الزورق يستطيع الانزلاق على سطح الماء دون مقاومة . كما نفترض ان قطعة الجليد كانت في لحظة البدء عند رأس المستوى المائل وكان القارب ساكناً وانطلقت القطعة بدون سرعة ابتدائية . بين ان قطعة الجليد تلامس الماء بعد فترة زمنية قدرها .

$$t = \left[\frac{2 L (M + m \sin^2\Theta}{g (M + m) \sin \Theta} \right]^{\frac{1}{2}}$$

حيث M كتلة القارب مع حمولته باستثناء قطعة الجليد وحيث g قيمة التسارع الأرضي .

المسالة (VII - 18) :

تنطلق رصاصة كتلتها m من بندقية بسرعة v_0 فتصيب قطعة من الخشب كتلتها M موضوعة على مستو افقي تستطيع الانزلاق عليه بدون احتكاك، وتستقر الرصاصة في قطعة الخشب .

1) احسب سرعة قطعة الخشب مع الرصاصة المستقرة فيها .

2) احسب الطاقة الضائعة المتحولة إلى حرارة بسبب الاصطدام .

3) أعد المسألة إذا كانت قطعة الخشب حين اصابتها بالرصاصة متحركة بسرعة v_1 بعيداً عن البندقية .

المسالة (VII - 19) :

تتشكل على الأرض طبقة رقيقة من الغبار سمكها h صغير جداً بالنسبة لنصف قطر الأرض R ، وذلك بسبب تساقط أجسام من الفضاء عليها ومن جميع الجهات وفي جميع الاتجاهات . أحسب التغير الناتج في طول اليوم الارضي نتيجة لتشكل هذه الطبقة مبيناً ما إذا كان هـذا التغير يزيد في

طول اليوم او ينقصه ومفترضاً أن الارض متجانسة وكثافتها D وان طبقة الغبار متجانسة ومنتظمة التوزع وكثافتها d .

المسألـة (VII - 20)

لدينا قرص دائري كتلته M ونصف قطره R . يستطيع هذا القرص أن يدور في مستو أفقي حول احد مولداته الشاقولية B . أي حول محور شاقولي يمر من نقطة من محيطه . يقف على طرف هذا القرص رجل H كتلته m . في اللحظة $t = o$ كان القرص والرجل ساكنين تماماً . وفي تلك اللحظة بدأ الرجل يمشي على محيط القرص واستمر بالمسير حتى قطع دورة كاملة على القرص . عين موضع القرص في لحظة إتمام الرجل دورته حول القرص .



مسائل الفصل الثامن

المسألة (VIII - 1)

صاروخ نفاث كتلته الكلية مع وقوده هي M_o وينفث الوقود المحترق بنزارة قدرها α وسرعة u ويتحرك ابتداء من السكون مبتعداً عن الأرض .

1) احسب سرعة الصاروخ وبعده عن الأرض في أية لحظة t أثناء عمل محركه باستمرار .

2) إذا كانت كتلة الوقود الكلي هي $M_o/2$ فمتى يتوقف محركه عن العمل ؟

3) ما هي سرعة الصاروخ في لحظة توقف المحرك عن العمل (أي لحظة نفاد الوقود) ؟

4) ما هو بعده عن الأرض في تلك اللاحظة ؟

5) ما هو أكبر بعد يصله الصاروخ ومتى يصل إليه ؟

افرض في كل ما تقدم أن تسارع الثقالة الأرضية ثابت .

6) اعد المسألة مفترضاً أن التسارع الأرضي متناسب عكساً مع مربع البعد .

المسألة (VIII - 2)

يتجه صاروخ نحو القمر حاملاً مركبة وملاحيها للهبوط على سطحه . وفي وفي لحظة نعتبرها مبدأ للزمن $t = o$ كان على ارتفاع H عن سطح القمر

وكانت سرعته A_0 باتجاه مركزه . يستعمل الملاحـون للهبوط على القمر برفق محركات نفاثة تعاكس حركة الصاروخ . فاذا فرضنا أن تسارع الجاذبية القمرية g_1 ثابت وأن سرعة انفلات الوقود المحترق u وغزارته α أثناء جميع مراحـل الهبوط فان المطلوب هو تعين α ليتم الهبوط برفق تام .

المسألـة (VIII - 3)

تصطدم كرتان كتلتا هما m_1 و m_2 وسرعتاهما v_1 و v_2 اصطداماً راسياً عامل رسوه ε .

1) احسب الطاقة المتحركة إلى حرارة وعين قيمة ε التي تجعل هـذه الطاقة مساوية 5 ٪ من الطاقة الحركية الكلية للكرتين قبل اصطدامها .

2) احسب مقدار الاندفاع المتبـادل بين الكتلتين m_1 و m_2 بسبب الاصطدام .

المسألـة (VIII - 4)

تصطدم كرة كتلتها m بالأرض الأفقية بسرعة v تصنع مـع سطح الارض زاوية Θ .

1) احسب سرعة ارتداد الكرة v' وزاويتها Θ' مع الارض مفترضاً أن عامل رسو الاصطدام (عامل المرونة) هو .

2) إذا كان الاصطدام ناتجاً عن سقوط حر للكرة من ارتفـاع H وإذا ارتدت نتيجة ذلك إلى نصف هذا الارتفاع فما هي قيمة عامل الرسو عندئذ ؟

المسألـة (VIII - 5)

تسقط كرة معدنية على مستوى أفقي ثابت تماماً سقوطاً حراً من ارتفاع H فترتد عنه ثم تسقط عليه . ويتكرر الامر حتى تقف مستقرة عليه . برهن أن

المسافة الكلية التي تقطعها الكرة منذ بدء سقوطها الاول إلى أن تستقر على المستوى الافقي تعطي بالعلاقة :

$$S = H\left(1+\varepsilon^{2}\right)/\left(1-\varepsilon^{2}\right)$$

حيث ε عامل مرونة اصطدام الكرة بالمستوي .

المسالـة (VIII - 6)

صاروخ متعدد المراحل يحمل مركبة باتجاه المريخ ، الكتلة الكلية للصاروخ والمركبة والوقود هي M . كتلة الوقود الكلي وحده m . وكتلة المحرك الاول m_1 وغزارة انفلات الوقود المحترق a .وسرعة انفلاته u ، ينطلق الصاروخ من السكون بفعل محركه الاول الذي يستمر حتى يستهلك 80 % من الوقود الكلي . عندئذ ينفصل المحرك الاول بفعل آلية خاصة طاقتها E . المطلوب :

1) احسب سرعة الصاروخ وموضعه في لحظة توقف المحرك الاول !

2) احسب سرعة الصاروخ في لحظة انفصال المحرك الاول واحسب ايضاً سرعة المحرك المنفصل .

3) ما هو ازدياد الطاقة الحركية للصاروخ من جراء انفصال المحرك النفاث الاول ؟

4) ما هي السرعة النسبية للمحرك المنفصل بالنسبة للصاروخ ؟

مسائل الفصل التاسع

المسالـة (IX - 1)

المربع ABCD عبارة عن صفيحة معدنية متجانسة طول ضلعها a .
نستعمل جملة محاور ثلاثة ، اثنان منها ينطبقان على ضلعي الصفيحة .

1) احسب عزوم عطالة هذه الصفيحة حول المحاور الاحداثية .

2) احسب مضاريب العطالة حول تلك المحاور .

3) استنتج من الطلب الاول عزم العطالة حول محور ناظم على الصفيحة في مركز تناظرها .

4) احسب عزوم العطالة الرئيسية لهذه الصفيحة .

5) عين هذه المحاور .

6) احسب عزم عطالة الصفيحة حول محور في مستويها ويصنع زاوية قدرها 30° مع احد اضلاعها ماراً من احد رؤوسها .

7) اعد السؤال الاخير من أجل محور يوازي المحور المذكور ويمر من مركز تناظر الصفيحة ، أي مركز كتلتها .

المسالـة (XI - 2)

إذا كانت الصفيحة ABCD في المسألة السابقة مستطيلة الشكل ضلعاها a , b فأعد الاجابة على الاسئلة الخمسة الاولى فقط .

المسالـة (XI - 3)

مجسم قطع ناقص انصاف محاوره a , b , c ومعادلاته الديكارتيه :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

1) عين محاور عطالته الرئيسية المارة من مركزه .

2) احسب عزوم عطالته الرئيسية حول تلك المحاور .

3) اذا كان $a = b \neq c$ وكان a , b قريبين من c بين أن :

$$(J_3 - J_1) / J_1 = 1 - c / a$$

حيث $J_1 = J_2 \neq J_3$ هي عزوم العطالة الرئيسية المحسوبة في الطلب الثاني .

المسألة (IX - 4)

نعرف عزم عطالة جسم S حول نقطة ما مثل P باحدى العبارتين التاليتين :

$$I_p = \sum_i m_i r_i^2$$

أو :

$$I_p = \int_s r^2 \, dm$$

وذلك حسبما يكون الجسم متقطعاً أو مستمراً بالترتيب ، وحيث r , r_i يمثلان البعد عن النقطة P لعنصر المجموع او التكامل . كما أننا نعرف عزم عطالة الجسم حول مستو H باحدى العبارتين التاليتين :

$$I_H = \sum_i m_i r_i^2$$

أو :

$$I_H = \int_s r^2 dm$$

حيث r_i ، r يدلان على البعد عن المستوي H . ونلاحظ أن هذين التعريفين منسجمان مع تعريف عزم العطالة حول محور .

نعتبر الآن عزم العطالة حول مبدأ الاحداثيات O وليكن I_o . ونعتبر عزوم العطالة حول المحاور الاحداثية ox ، oy ، oz ولتكن هذه العزوم

I_{ox} ، I_{oy} ، I_{oz} . واخيراً نعتبر عزوم المطالة حول المستويات الاحداثية oxy ، oyz ، ozx ، ولتكن هذه العزوم I_{oxy} ، I_{oyz} ، I_{ozx} .

1) اكتب العبارة العامة التفصيلية لكل من هذه العزوم بدلالة الاحداثيات الديكارتية لنقاط الجسم في كل من الحالتين :

آ ـ الجسم متقطع .

ب ـ الجسم مستمر .

2) استنتج من هذه العبارات وفي الحالتين أن :

$$I_o = I_{oxy} + I_{oyz} + I_{ozx}$$

$$I_o = \tfrac{1}{2}\left[I_{ox} + I_{oy} + I_{oz} \right]$$

المسالة (IX - 5)

استخدم نتائج المسألة الاخيرة فيما يلي :

1) احسب عزم طالة كرة جوفاء حول احد أقطارها ، ثم استنتج عزم عطالتها حول محور يمسها .

2) احسب عزم عطالة مكعب أجوف حول محور يمر من مركزي وجهين متقابلين . استنتج بعد ذلك عزم عطالته حول أحد حروفه .

3) أعد المسألة إذا كانت الكرة والمكعب أصمين .

4) استخدم نتائج المسألة الاخيرة ايضاً حيثما يصعب حساب عزوم المطالة حول المحاور ويسهل عن طريق حساب غير مباشر مستخدماً عزوم المطالة حول نقطة (مثل مركز التناظر) وحول بعض المستويات (مثل مستويات التناظر أو المستويات الاحداثية) .

المسالة (IX - 6)

احسب عزوم عطالة الاجسام المتجانسة التالية حول المحاور المشار اليها من أجل كل جسم :

1) مستطيل ABCD مركزه O فرغ منه مستطيل آخر A'B'C'D'

مركزه O أيضاً والاضلاع متوازية ، ابعادهما a ، b للأول و a' , b' للثاني . حول أحد محوري التناظر وحول الناظم في O .

2) مثلث ABC متساوي الاضلاع حول أحد أضلاعه وحول أحد الارتفاعات .

3) مثلث ABC مختلف الأضلاع حول أحد أضلاعه .

4) مخروط دوراني نصف قطر قاعدته R وارتفاعه H حول محوره وحول قطر قاعدته .

5) معين حول كل من قطريه وحول ناظمه المار من مركزه وحول أحد أضلاعه وحول ناظمه المار من أحد رؤوسه .

المسالة (IX - 7)

الجملتان الاحداثيتان oxy ، $ox'y'$ قائمتان واقعتان في مستو واحد ولهما مركز واحد . الجسم الصلب S مستو وواقع في مستوي الجملتين ومنتظم التوزيع الكتلوي . لتكن P نقطة من هذا الجسم احداثياها في الجملة الأولى x , y وفي الجملة الثانية x', y' . ولتكن Θ الزاوية المحصورة بين المحورين ox', ox .

1) احسب x' و y' بدلالة x, y, Θ .

2) اكتب عبارة كل من عزوم العطالة حول المحاور الأربعة ولتكن

$$I_{ox} \ , \ I_{oy} \ , \ I_{ox}' \ , \ I_{oy}'$$

3) بين أن :

$$I_{ox}' = I_{ox} \cos^2\Theta - 2 I_{xy} \cos\Theta \sin\Theta + I_{oy} \sin^2\Theta$$

$$I_{oy}' = I_{ox} \sin^2\Theta + 2 I_{xy} \cos\Theta \sin\Theta + I_{oy} \cos^2\Theta$$

حيث I_{xy} هو مضروب العطالة بالنسبة للمحورين ox و oy .

4) هل تتفق نتيجة الطلب الاخير مع مضمون نظرية المحاور المتعامدة ؟ بين ذلك بالحساب .

مسائل الفصل العاشر

المسالـة (X - 1)

اسطوانة صماء نصف قطرها R وكتلتها M تتدحرج على مستوٍ مائل يصنع مع الأفق زاوية Θ .

1) استخرج معادلة حركتها وادرس الحركة مفترضاً عدم انزلاق الأسطوانة على المستوي المائل .

2) عين المحل الهندسي للمركز الآني للدوران وعين المتدحرج والقاعدة في الحالتين التاليتين :

آ ـ لا يوجد انزلاق .

ب - يوجد انزلاق .

المسالـة (X - 2)

اسطوانة كبيرة ثابتة محورها أفقي ونصف قطرها R . وضعت فوقها اسطوانة صغيرة نصف قطرها r وبحيث تتماسان وفق المولدات . بدأت الاسطوانة الصغيرة تتحرك دون انزلاق وبدون سرعة ابتدائية .

1) عين الموضع الذي تنفصل فيه الاسطوانة المتحركة عن الثابتة .

2) استخرج معادلة الحركة ثم ادرسها .

3) عين القاعدة والمتدحرج اللذين يرسمها المحور الآني للدوران .

المسالـة (X - 3)

يتألف جسم صلب من متوازي مستطيلات لصق على أحد وجوهه نصف اسطوانة . وضع فوق مستو افقي بحيث يمسه وفق احد مولدات الاسطوانة .

1) عين وضع التوازن واستنتج الشرط اللازم والكافي لكي يكون هذا التوازن مستقراً .

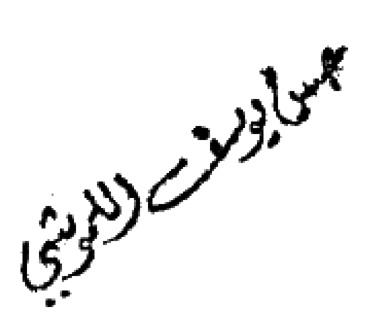
2) اكتب معادلة الحركة وادرسها.

المسالـة (4 - X)

تقف سيارة على طريق مائل ومكابحها مشدودة . تربط بحبل يتوسطه نابض قوي ويثبت طرف الحبل الآخر بعمود ثابت خلفها .

1) تترك السيارة لتتحرك بارسال مكابها . اكتب معادلات الحركة وادرسها .

2) عين وضع التوازن وحدد نوعه .





مسائل الفصل الحادي عشر

المسألة (XI - 1)

اطار مستطيل الشكل ومستو . بعدا مستطيله الخارجي b , a وبعدا مستطيله الداخلي a' , b' . نعتبر محوري تناظره والمحور المتعامد معهما محاور جملة احداثية $oxyz$.

1) بين ان هذه المحاور هي محاور عطالة رئيسية للاطار .

2) احسب عزوم المطالة حول هذه المحاور .

3) عين مركبات المزدوجة $\vec{\Lambda}$ على هذه المحـاور بحيث ان هذه المزدوجة تجعل الاطار يدور حول احد قطريه بسرعة زاوية ثابتة $\vec{\omega}$.

المسألة (XI - 2)

قضيب صلب AB طوله L مهمل الكتلة ويحمل في طرفيه كتلتين متساويتين كل منهما M . يدور هذا القضيب مع الكتلتين حول الشاقول oz المار من منتصفه O بسرعة زاوية ثابتة ω وبحيث يصنع دوماً زاوية ثابتة Θ مع الشاقول .

1) برهن ان الاندفاع الزاوي $\vec{\Omega}$ لهذه الجملة يرسم مخروطاً دورانياً حول oz وعين زاوية هذا المخروط .

2) احسب شدة الاندفاع الزاوي ودوره حول oz .

المسألة (XI - 3)

قرص معدني دائري رقيق نصف قطره a يدور حول مركزه O الذي

يستند إلى رأس قضيب مدبب AO ثابت وشاقولي . يعطي هذا القرص سرعة زاوية ابتدائية $\vec{\omega}_0$ تصنع مع ناظمه (ناظم القرص) ON زاوية Θ .

1) برهن ان شعاع السرعة الدورانية $\vec{\omega}$ لهذا القرص يدور حول الناظم ON بدور قدره $2\pi/\omega_0 \cos\Theta$.

2) برهن كذلك ان الناظم ON يرسم في الفراغ مخروطاً (نسميه مخروط الناظم) واحسب زاوية هذا المخروط .

3) بين ان دور حركة المبادرة للناظم (وهو الزمن اللازم للناظم ليرسم مخروطه في الفراغ مرة واحدة) يساوي :

$$2\pi / \omega_0 \sqrt{1 + 3\cos^2\Theta}$$

المسألـة (XI - 4)

تتحرك دوامة متناظرة حول رأسها الثابت O في حقل الثقالة الارضية عزوم عطالة هذه الدوامة حول محـاور ثلاثة متعامدة مارة من O هي I_1 ، I_2 ، I_3 بحيث ان الاخير هو حول محور تناظرها ؛ ويلاحظ ان $I_1 = I_2 \neq I_3$.

1) احسب بدلالة زوايا اولير φ و Θ و ψ مركبات سرعتها الدورانية الآنية على المحاور السابقة والمرتبطة بالدوامة .

2) استنتج الطاقة الحركية الدورانية والطاقة الكلية للدوامة .

3) اكتب معادلات الحركة .

4) بين ان مسقطي الاندفاع الزاوي Ω_z على المحور الشاقولي و Ω_z' على محور تناظر الدوامة ثابتان .

5) احسب السرعتين الزاويتين φ' و ψ' .

6) بين ان Θ' تكتب بالشكل التالي :

$$\Theta' - \sqrt{2\,[C - U(\Theta)]/I_1}$$

حيث C ثابت و $U(\Theta)$ تابع لـ Θ .

7) ما هو عدد جذور المعادلة $U(\Theta) = C$.

المسألة (XI - 5)

في الحركة الفراغية العامة للدوامة .

1) اوجد الشرط االلازم لكي يتحرك محورها حركة مبادرة منتظمة .

2) بين ان هناك تواترين لحركة المبادرة .

3) متى لا يوجد إلا تواتر واحد لهذه الحركة ؟

4) عين الشرط اللازم للحصول على الدوامة « النائمة » اي التي يكون دورانها حول محورها الثابت في الفراغ .

□ □ □

مسائل الفصل الثاني عشر

المسألة (XII - 1)

تتحرك خرزة (كرة مثقوبة) بدون احتكاك على سلك دقيق مستقيم AB يدور حول الشاقول المار من A بسرعة زاوية ثابته ω . نفرض أن كتلة الخرزة m وطول السلك L .

1) استخرج تابع لاغرانج لهذه الخرزة .

2) استنتج معادلات حركتها .

3) ادرس الحركة .

4) عين الزمن اللازم لها لتصل إلى طرف السلك B علماً بأنها بدأت حركتها من A دون سرعة ابتدائية .

المسألة (XII - 2)

نوامس مزدوج مؤلف من سلك طوله a_1 علقت في طرفه كتلة m_1 يتمفصل بها سلك آخر طوله a_2 في طرفه الآخر كتلة m_2 . نفرض أن السلكين لا ينثنيان أثناء الحركة وأن كتلتيهما مهملتان . في لحظة البدء كانت زاوية السلك الأول مع الشاقول Θ_1 . وزاوية السلك الثاني مع الشاقول Θ_2 . ثم تركت الجملة تتحرك الجملة تتحرك في مستويها الشاقولي .

1) استخرج كلا من الطاقة الحركية والكامنة وتابع لاغرانج لهذه الجملة .

2) ضع معادلات الحركة بطريقة لاغرانج ثم ادرس الحركة .

3) كيف تصبح هذه المعادلات في حالة الاهتزازات صغيرة السعة وتساوي الكتلتين $m_1 = m_2 = m$ وتساوي الطولين $a_1 = a_2 = a$ ؟

المسألة (IX - 3)

تتحرك خرزة كتلتها m على سلك معدني دقيق له شكل ثابت وواقع في المستوى الشاقولي ومطى بمعادلتيه الوسيطيتين .

$$x = a\,(\Theta + \sin\Theta)$$
$$y = a\,(1 - \cos\Theta)$$

حيث $0 \leq \Theta \leq 2\pi$ وحيث تتم الحركة بدون احتكاك .

1) استخرج معادلات لاغرانج وبين أن الحركة دورية .

2) كيف تصبح هذه المعادلات إدا غيرنا الوسيط كالتالي :

$$u = \cos\frac{\Theta}{2}$$

المسألة (XII - 4)

قرصان دائريان متجانسان كتلة الأول m_1 وكتلة الثاني m_2 ونصفا قطريهما r_1 و r_2 بالترتيب . علق القرصان من مركزيهما O_1 و O_2 بخيط واحد مثبت في السقف بنقطة O وبحيث أن النقاط O و O_1 و O_2 على شاقول واحد وبحيث يستطيع كل من القرصين الدوران في مستويه الافقي حول خيط التعليق . وليكن c_1 و c_2 ثابتا فتل جزئي الخيط OO_1 و O_1O_2 بالترتيب . في لحظة البدء أدير القرص الاول والقرص الثاني عن وضع التوازن زاويتين Θ_1 و Θ_2 وتركا يهتزان اهتزازاً دوانياً حول الخيط الشاقولي .

1) احسب الطاقة الحركية لجملة القرصين في لحظة ما t وكذلك كمون هذه الجملة وتابع لاغرانج لها .

2) استخرج معادلات الحركة وادرسها .

3) متى يكون للقرصين حركة اهتزازية واحدة ؟

المسألة (XII - 5)

تتحرك نقطة مادية p كتلتها m على مجسم قطع مكافىء دروانى محوره الشاقول الصاعد oz ومعادلته .

$$x^2 + y^2 = \alpha z$$

اكتب معادلات الحركة بطريقة لاغرانج .

1) باعتبار الجملة بسيطة .

2) باعتبار الجملة معقدة .

المسالـة (XII - 6)

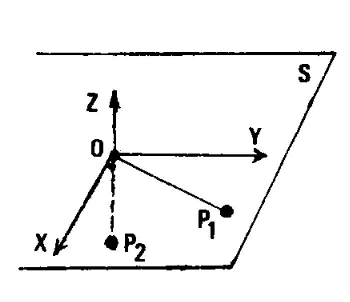
إذا اعتبرنا الحركة العامة للجسم الصلب فانـه يطلب الآن استعمال طريقـة معادلات لاغرانج لاستنتاج :

1) معادلات أولير .

2) معادلات حركة الدوامة .

3) حل المسألة (XI - 4) .

المسالـة (XII - 7)



يمثل الشكل المرافق لوحاً معدنيـاً مستوياً صقيلاً أفقياً S فيه ثقب صغير o يمر منـه خيط مهمل الكتلة وعديم الامتطاط طوله a . يرتبط الخيط من طرفيه بكتلتين متساويتين P_1 و P_2 كل منهما m وتستطيع P_1 الحركـة بدون احتكاك على المستوى في حين تستطيع الثانية P_2 الحركة على الشاقول المار من الثقب O

في لحظة ما نعتبرها مبدأ للزمن أعطيت p_1 سرعة ابتدائية في المستوى S .

1) عـين درجات حرية الجملة وعـين المتحولات المستقبـلة اللازمة كاحداثيات .

2) احسب الطاقة الحركية والطاقة الكامنة وتابع لاغرانج للجملة .

3) استنتج معادلات الحركة .

4) عين الشروط التي تجعل حركة p_1 دائرية منتظمة .

المسالة (XII - 8)

لبنة معدنية A كتلتها M_1 تستطيع الانزلاق بدون احتكاك على مستو افقي x'x يتمفصل بها قضيب صلب متجانس كتلته m وطوله a ويحمل في طرفه الثاني كرة B كتلتها M_2 ويستطيع الحركة في مستو شاقولي .

1) عين عدد درجات الحرية للجملة S المؤلة من M_1 و M_2 و m ، ثم اختر المتحولات التي ترغبها كاحداثيات عامة .

2) احسب تابع لاغرانج واستخرج معادلات الحركة .

3) حل المعادلات وادرس الحركة في حالة الاهتزازات صغيرة السعة .

المسالة (XII - 9)

يتمفصل القضبان المتجانسان AB و BC في النقطة B تمفصلاً بدون احتكاك . طول كل منها a وكتلته m . وضعا في مستو افقي على استقامة واحدة ، وطبق على الطرف C للقضيب الثاني دفع مقداره J متعامد مع استقامة القضيب وبحيث ان النقطة C قد اخذت سرعة ابتدائية v_0 . ونفرض ان كل الحركات تتم دون احتكاك .

1) احسب السرعة الابتدائية لكل من A و B .

2) احسب السرعة الزاوية الابتدائية لكل من القضيبين AB و BC .

المسالة (XII - 10)

اربعة قضبان معدنية متجانسة ومتماثلة طول كل منها a وكتلته m تتمفصل فيما بينها بحيث تشكل معيناً بصورة عامة ABCD . يوضع هذا المعين على مستو افقي oxy بحيث تكون زواياه قائمة (اي بشكله المربع) واضلاعه توازي المحورين ox و oy .

يطبق في النقطة A دفع J يوازي oy ونفرض إن الحركة تتم بدون احتكاك .

1) استخرج معادلات حركة هذا المين مستعملاً القوي النبضية .

2) استنتج بعد ذلك السرع الابتدائية لكل من D,C,B,A ، وكذلك السرع الدورانية الابتدائية لكل من القضبان الاربعة .

عيسى أبو عون المويشي

مسائل الفصل الثالث عشر

المسالة (XIII - 1)

يتحرك جسيم كتلته m تحت تأثير حقل الجاذبية الأرضية . اكتب الهاميلتوني لهـذا الجسيم واستخرج المعادلات القانونية لحركته (معادلات هاميلتون) .

المسالة (XIII - 2)

يتحرك جسيم كتلته m تحت تأثـير حقل قوى مركزي مركزه مبدأ الاحداثيات O . اكتب تابعه الهاميلتوني واستخرج معادلات حركته القانونية .

المسالة (XIII - 3)

لنعتبر جسيماً مادياً كتلته m مقيداً بالحركة على اسطوانة نصف قطرها R ومحورها oz ومعادلتها بالتالي $x^2 + y^2 = R^2$. يخضع هذا الجسيم لقوة متناسبة مع البعد ومتجهة نحو O ومعطاة بالعلاقة $\vec{F} = - k \vec{r}$ حيث k ثابت و r شعاع موضع الجسيم ، ونهمل قوة الثقالة الأرضية .

1) اكتب عبارة الطاقـة الحركية والطاقة الكامنة وتابعي لاغرانج وهاميلتون .

2) استنتج من الأخير معادلات حركة الجسيم .

3) بين أن الاندفاع الزاوي حول oz ثابت وان الحركة وفق oz اهتزازية منتظمة .

المسالة (XIII - 4)

يتحرك جسيم كتلته m حركة مستقيمة وخاضعاً لتأثير القوة :

$$F(x,t) = \frac{k}{x^2} e^{-(t/a)}$$

حيث k و a ثابتان .

1) احسب كلاً من الطاقة الكلية وتابع هاميلتون .

2) قارن هذين المقدارين وناقش انخفاظ الطاقة .

3) اكتب معادلات الحركة .

المسألة (XIII - 5)

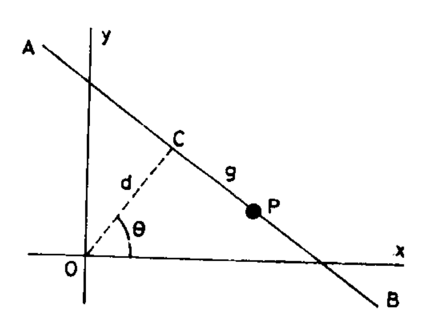
استخرج المعادلات القانونية للحركة من أجل جسيم مادي كتلته m يتحرك على اللولب :

$$r = \text{const} \qquad\qquad z = k\,\Theta$$

حيث k ثابت و oz الشاقول علماً بأنه خاضع لقوة الجاذبية الأرضية .

المسألة (XIII - 6)

يتحرك جسيم P كتلته m بتأثير ثقله على سلك AB في مستو شاقولي . بعد مركز الاحداثيات O عن هذا السلك هو $d = OC$. يدور السلك في المستوي oxy حول O بحيث تبقى C ثابتة عليه وبحيث يبقى البعد OC ثابتاً . نفرض ان الاحداثيين اللازمين لتعيين موضع الجسيم هما الطول $q = CP$ والزاوية $XOC = \Theta$. كما نفرض شروط البدء التالية :



$$\Theta(o) = o \quad , \quad q'(o) = o \quad , \quad q(o) = o$$

1) احسب الهاميلتوني للجسيم P وطاقته الكلية وقارنها وناقش انخفاظ الطاقة .

2) اكتب معادلات الحركة وبين ان q تعطى بدلالة الزمن بالعلاقة :

$$q(t) = \frac{g}{2\omega^2}\,(\,\text{coh}\;\omega t - \cos\,\omega t\,)$$

المسألة (XIII - 8)

1) بين ان الهاميلتوني للهزاز التوافقي يعطى بدلالة الاحداثيات الوضعية والاندفاعية بالملاقة :

$$H= \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

2) ننقل من p و q إلى احداثيين جديدين P ، Q حسب الملاقتين :

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q$$

حيث $\omega = \sqrt{k/m}$

بين أن الهاميلتوني يأخذ الشكل $H = \omega P$.

3) بين أن $P = E/\omega = \text{Const}$ حيث E الطاقة الكلية للهزاز التوافقي .

4) بين أخيراً أن q تعطى بدلالة الزمن بالملاقة :

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \text{Sin}(\omega t + \beta)$$

حيث β ثابت اختياري .

المسألة (XIII - 9)

هل التحويل التالي قانوني :

$$Q = \log\left(\frac{1}{q}\text{Sin } p\right) , P = q \cot p$$

المسألة (XIII - 10)

لدينا التحويل :

$$Q = \log(1 + \sqrt{q} \cos p)$$

$$P = 2(1+ \sqrt{q} \cos p) \sqrt{q} \text{ Sin } p$$

1) بين ان هذا التحويل قانوني وانه إذا كان p , q قانونيين فان Q , P تكونان كذلك .

2) بين أن التابع المولد لهذا التحويل هو :

$$G = -(e^{Q} - 1)^2 \tan p$$

المسالـة (XIII - 11)

ادرس قانونية التحويل :

$$P = \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

$$Q = \text{Arc} \tan (q/p)$$

المسالـة (XIII - 12)

ليكن التحويل المعطى بالعلاقتين :

$$Q = q^{\alpha} \cos \beta p$$

$$P = q^{\alpha} \sin \beta p$$

1) ما هي قيمتا α , β اللتان تجعلان هذا التحويل قانونياً ؟

2) ما هو التابع المولد لهذا التحويل عندئذ ؟

المسالـة (XIII - 13)

من أجل أية توابع ثلاثة F ، G ، H لـ p , q تتحقق العلاقة التالية في معترضات بواسون :

$$\big[[F, G], H \big] = \big[[G, H], F \big] + \big[[H, F], G \big]$$

مسائل الفصل الرابع عشر

المسالة (XIV - 1)

تتحرك الجملة العطالية S′ بسرعة v بالنسبة للجملة العطالية S .

نعتبر حادثتين A , B تحصلان في مكانين مختلفين وزمن واحـــد في الجملة S . بين أن هاتين الحادثتين تحصلان في زمنين مختلفين في الجملة S′ الفرق بينهما :

$$t'_2 - t'_1 = \frac{v\,(x_2 - x_1)}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

المسالة (XIV - 2)

يتحرك ميزون من الأشعة الكونية مقترباً من الأرض بسرعة قدرها v = 0 . 99 c . العمر النصفي لتفكك هذا الميزون الى الكترون ونوترينوين يساوي 2.22 مكرو ثانية وكذلك كما يقاس في جملة الميزون الخاصة . ما قيمة هذا العمر النصفي عندما يقاس من قبل راصد على الأرض ؟

المسالة (XIV - 3)

يميل القضيب AB الذي طوله L بزاوية Θ على المحور ox في الجملة S. بين أن طول هذا القضيب L′ وزاويته Θ′ مع ox′ في الجملة S′ التي تتحرك بالنسبة لـ S بسرعة v يعطيان بما يلي :

$$L' = L\left(\frac{\cos^2\Theta}{\gamma^2} + \sin^2\Theta\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \tan\Theta' = \gamma\tan\Theta$$

حيث :

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

المسألة (XIV - 4)

تحلق طائرة طولها عشرة أمتار بسرعة قدرها 300 متراً في الثانية . ما هو طول هذه الطائرة الذي يقيسه مراقب على الأرض ؟ وبعد كم من الزمن تقصر ساعة الطيار مكرو ثانية واحد عن ساعة الراصد على الأرض ؟

المسألة (XIV - 5)

اعتبر نواة مشعة كيفاتية تدق n_0 مرة في الثانية وتطلق موجة ضوئية في كل دقة . فاذا كانت النواة تتحرك بسرعة v بالنسبة لراصد على الأرض فاحسب عندئذ عدد الدقات n التي يقيسها الراصد في الثانية الواحدة .

المسألة (XIV - 6)

يبتعد نجم عن الأرض بسرعة قدرها 50 كيلومتراً في الثانية الواحدة وتطلق ضوءاً طول موجته 6563 انفستروم . ما هو مقدار تغير طول موجة هذا الضوء عندما يقاس من قبل راصد على الأرض ؟

الفهرس

* * *



صدر باشراف لجنة الانجـاز

سعر المبيع للطالب (٣٠) ل.س

٢٢٦